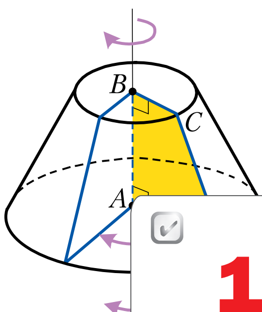
Алгоритм успеха

А.Г. Мерзляк
Д.А. Номировский
В.Б. Полонский
М.С. Якир

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Геометрия



11 класс

Базовый уровень

Учебник для учащихся общеобразовательных организаций

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2013

ББК 22.151.0я721
М52

Мерзляк А.Г.

М52 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия : 11 класс : базовый уровень : учебник для общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский и др. — М. : Вентана-Граф, 2013. — 172 с. : ил.

Учебник предназначен для изучения геометрии в 11 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к геометрии.

Учебник входит в систему «Алгоритм успеха».

Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования (2012 г.).

ББК 22.151.0я721

От авторов

В этом учебном году вы завершите изучение школьного курса стереометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями, и этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Познакомьтесь с его структурой.

Учебник разделён на две главы, каждая из которых состоит из параграфов. В них изложен теоретический материал; самые важные сведения выделены **жирным шрифтом** и *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после изучения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, не простой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

Простые задачи

Задачи средней сложности

Сложные задачи

Задачи, которые можно решать с помощью компьютера

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы или решения задачи

439 Задания, рекомендуемые для домашней работы

480 Задания для устной работы

Глава 1. Координаты и векторы в пространстве

В этой главе вы познакомитесь с прямоугольной системой координат в пространстве, научитесь находить координаты точек в пространстве, длины отрезка и координаты его середины, зная координаты его концов.

Вы обобщите и расширите свои знания о векторах.

§ 1. Декартовы координаты точки в пространстве

В предыдущих классах вы познакомились с прямоугольной (декартовой) системой координат на плоскости — это две перпендикулярные координатные прямые с общим началом координат (рис. 1.1).

Систему координат можно ввести и в пространстве.

Прямоугольной (декартовой) системой координат в пространстве называют три попарно перпендикулярные координатные прямые с общим началом координат (рис. 1.2). Точку, в которой пересекаются три координатные прямые, обозначают буквой O. Её называют **началом координат**. Координатные прямые обозначим буквами x, y, z, их соответственно называют ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат.

Рис. 1.1

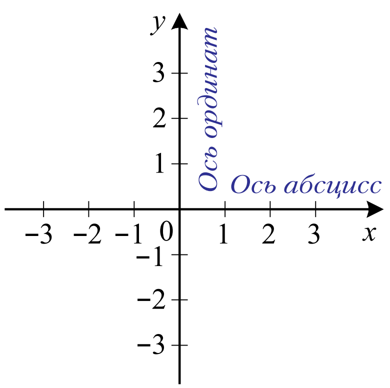
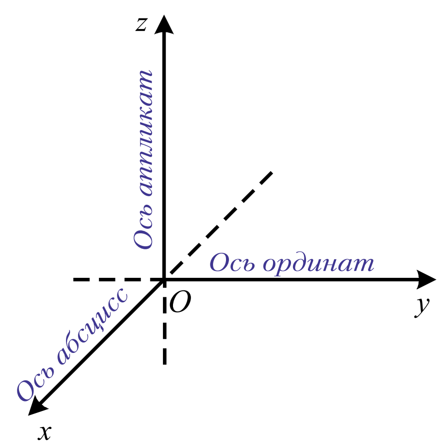
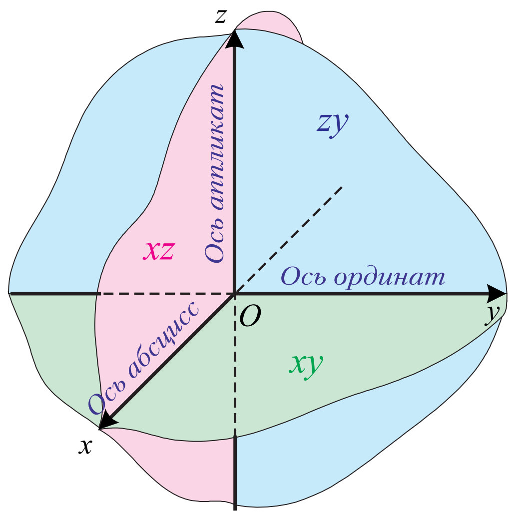


Рис. 1.2



Плоскости, проходящие через пары координатных прямых x и y, x и z, y и z, называют **координатными плоскостями**, их соответственно обозначают xy, xz, yz (рис. 1.3).

Рис. 1.3



Пространство, в котором задана система координат, называют **координатным пространством**. Если оси координат обозначены буквами x, y, z, то координатное пространство обозначают xyz.

Из курса планиметрии вы знаете, что каждой точке M координатной плоскости xy ставится в соответствие упорядоченная пара чисел $(x; y)$, которую называют координатой точки M. Записывают: $M\ (x; y)$.

Аналогично каждой точке M координатного пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$, определяемая следующим образом. Проведём через точку M три плоскости α, β и γ перпендикулярно осям x, y и x соответственно. Точки пересечения этих плоскостей с координатными осями обозначим M_x, M_y и M_z (рис. 1.4). Координату точки M_x на оси x называют **абсциссой** точки M и обозначают буквой x. Координату точки M_y на оси y называют **ординатой** точки M и обозначают буквой y. Координату точки M_z на оси z называют **аппликатой** точки M и обозначают буквой z.

Полученную таким образом упорядоченную тройку чисел $(x; y; z)$ называют координатами точки M в пространстве. Записывают: $M\ (x; y; z)$.

Если точка принадлежит координатной плоскости или координатной оси, то некоторые её координаты равны нулю. Например, точка $A\ (x; y; 0)$ принадлежит координатной плоскости xy, а точка $B\ (0; 0; z)$ принадлежит оси аппликат.

Теорема 1.1

Расстояние между точками $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$ можно найти по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Доказательство

Прямая AB не может быть параллельной сразу трём координатным прямым.

Пусть прямая AB не параллельна оси z (остальные два случая рассматривают аналогично).

Спроектируем точки A и B на координатную плоскость xy. Получим точки A_1 и B_1 (рис. 1.5). Очевидно, что абсцисса и ордината точки A соответственно равны абсциссе и ординате точки A_1. Таким же свойством обладают точки B и B_1. Из курса планиметрии вы знаете, что $A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Рис. 1.4

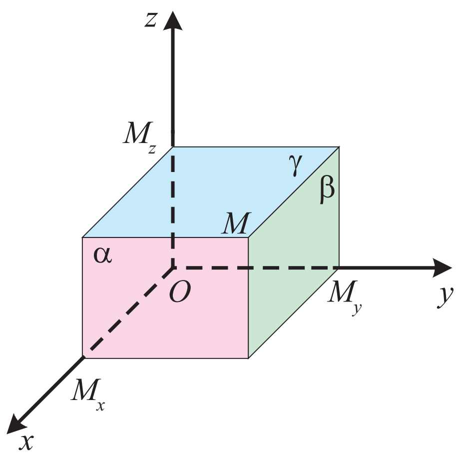
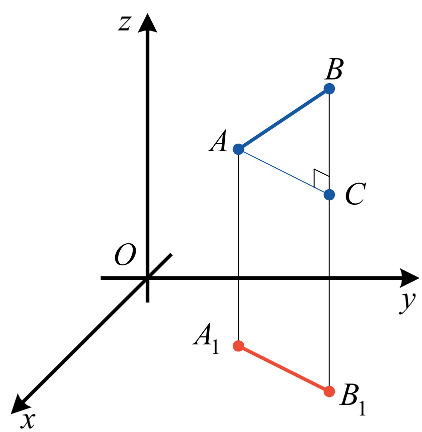


Рис. 1.5



Если отрезок AB параллелен координатной плоскости xy или ей принадлежит, то аппликаты точек A и B равны, т. е. $z_1 = z_2$, и $AB = A_1B_1$. Имеем:

$$AB = A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 0} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Следовательно, для рассматриваемого случая теорема доказана.

Пусть отрезок AB не параллелен координатной плоскости xy и ей не принадлежит. В трапеции ABB_1A_1 проведём высоту AC (см. рис. 1.5). Очевидно, что $BC = |z_2 - z_1|$. Из прямоугольного треугольника ABC получаем:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{A_1B_1^2 + BC^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \blacktriangleleft$$

Теорема 1.2

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Доказательство

Докажем, что точка $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ является серединой отрезка с концами $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$.

Имеем: $AM = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2 + \left(\frac{z_1 + z_2}{2} - z_1\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \frac{1}{2}AB;$

$MB = \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(z_2 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \frac{1}{2}AB.$

Итак, мы получили, что $AB = AM + MB$ и $AM = MB$. Следовательно, точка M — середина отрезка AB. ◄

1. Как называют три попарно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчёта?
2. Как называют точку, в которой пересекаются три координатные прямые?
3. Какими буквами обозначают координатные прямые?
4. Как называют координатную прямую, обозначенную буквой x? буквой y? буквой z?
5. Как называют плоскость, проходящую через пару координатных прямых?
6. Как называют пространство, в котором задана система координат?
7. Опишите, каким образом каждой точке M координатного пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$.
8. Где расположена точка, абсцисса которой равна нулю?
9. Где расположена точка, ордината которой равна нулю?
10. Где расположена точка, аппликата которой равна нулю?
11. Где расположена точка, абсцисса и ордината которой равны нулю?
12. Где расположена точка, абсцисса и аппликата которой равны нулю?
13. Где расположена точка, ордината и аппликата которой равны нулю?

14. Как найти расстояние между двумя точками, если известны их координаты?

15. Как найти координаты середины отрезка, если известны координаты его концов?

Упражнения

1.1. Определите, лежит ли данная точка на координатной оси:
1) A (3; –2; 0); 3) C (–2; 0; 0); 5) E (0; 0; –8);
2) B (2; 0; –3); 4) D (0; 1; 0); 6) F (–4; 0; 0).
В случае утвердительного ответа укажите эту ось.

1.2. Определите, принадлежит ли данная точка координатной плоскости:
1) M (3; –2; 1); 3) P (–4; 4; 0); 5) D (–8; 0; 0);
2) N (–2; 0; 4); 4) K (0; 1; 6); 6) Q (–8; 9; 3).
В случае утвердительного ответа укажите эту плоскость.

1.3. Какие из данных точек лежат на одной прямой, параллельной оси аппликат: A (4; –7; 1), M (4; 7; –1), T (4; –7; –1), R (–4; 7; –1)?

1.4. Какие из данных точек лежат на одной прямой, параллельной оси ординат: T (–2; 3; 1), R (2; 3; 1), S (–2; –8; 1), F (–2; 0; –1)?

1.5. Какие из данных точек лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xz: F (3; –8; 2), E (3; 8; –2), K (–3; –8; –2), N (3; 14; 2)?

1.6. Какие из данных точек лежат в одной плоскости, параллельной плоскости yz: A (6; –4; 10), B (6; 7; –12), C (4; 7; –12), D (–6; 13; 10)?

1.7. На каких расстояниях от координатных плоскостей находится точка D (–4; –2; 1)?

1.8. Диагональ квадрата $OABC$, лежащего в плоскости xz (рис. 1.6), равна $\sqrt{2}$. Найдите координаты его вершин.

1.9. Сторона правильного треугольника AOB (рис. 1.7), лежащего в плоскости yz, равна $2\sqrt{3}$. Найдите координаты его вершин.

Рис. 1.6

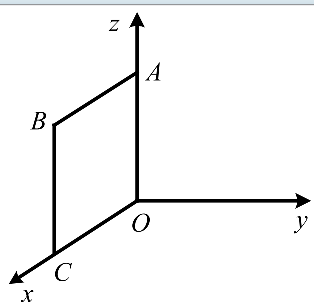
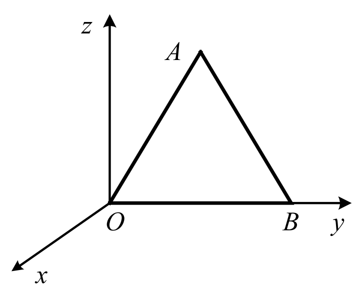


Рис. 1.7



1.10. Ребро куба $ABCOA_1B_1C_1O_1$ равно 4 (рис. 1.8). Найдите координаты вершин куба.

1.11. Ребро куба $OABCO_1A_1B_1C_1$ равно 6 (рис. 1.9). Найдите координаты вершин куба.

Рис. 1.8

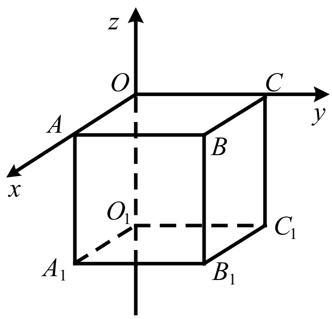
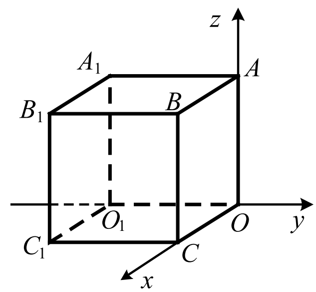


Рис. 1.9



1.12. Найдите координаты середины отрезка FK, если:
1) F (–2; 3; 4), K (6; 1; –2); 2) F (–3; 0; 4), K (3; 5; –2).

1.13. Найдите координаты середины отрезка ST, если:
1) S (–4; 8; –5), T (8; 6; –7); 2) S (–1; 13; 9), T (10; –15; 2).

1.14. Точки A (5; –3; 4) и D (–3; 1; –2) симметричны относительно точки C. Найдите её координаты.

1.15. Точка M – середина отрезка AB. Найдите координаты точки B, если A (–3; 8; 5), M (–5; 4; –6).

1.16. Точка C – середина отрезка MK. Найдите координаты точки M, если C (–6; 2; 3,5), K (0; –8; 3).

1.17. Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) A (3; –2; 3), B (–1; 2; 5);
2) A (1; 5; –6), B (–2; 3; –4).

1.18. Найдите расстояние между точками E и F, если:
1) E (7; –7; 10), F (1; –4; 4);
2) E (5; –2; –1), F (–3; 4; 3).

1.19. Найдите координаты точки, которая делит отрезок MK в отношении 3 : 1, считая от точки M, если M (3; –5; 1), K (–1; 7; 5).

1.20. Найдите координаты точки, которая делит отрезок AB в отношении 1 : 3, считая от точки A, если A (4; –5; 2), B (12; –3; –4).

1.21. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если A (3; –4; 5), B (–6; 1; 6), C (–5; 2; 1).

1.22. Найдите координаты вершины B параллелограмма $ABCD$, если A $(-3; 8; -5)$, C $(-7; 6; 7)$, D $(4; -2; -3)$.

1.23. В треугольнике ABC известно, что A $(3; -1; -2)$, B $(-5; 7; 4)$, C $(1; 5; 2)$. Найдите длину средней линии MN треугольника ABC, где M и N – середины сторон AC и BC соответственно.

1.24. Расстояние между точками A $(4; -5; 2)$ и B $(1; y; -4)$ равно 7. Найдите значение y.

1.25. Расстояние между точками A $(-2; 3; z)$ и B $(1; -5; -2)$ равно $7\sqrt{2}$. Найдите значение z.

1.26. На оси ординат найдите точку, равноудалённую от точек A $(-2; 3; 1)$ и B $(1; 2; -4)$.

1.27. На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек A $(4; -5; 6)$ и B $(2; 3; -4)$.

1.28. Найдите координаты точек A и B и длину отрезка AB, если точка A принадлежит оси z, точка B лежит в плоскости xy и точка C $(-12; 10; -5)$ – середина отрезка AB.

1.29. Найдите координаты точек A и B и длину отрезка AB, если точка A принадлежит оси y, точка B лежит в плоскости xz и точка C $(-2; 1; -3)$ – середина отрезка AB.

1.30. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A $(2; -3; 1)$, B $(-1; 0; 4)$, C $(4; 1; 5)$ и D $(7; -2; 2)$ является ромбом.

1.31. Докажите, что точки A $(5; 6; 7)$, B $(-1; -1; -4)$ и C $(11; 13; 18)$ лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

1.32. Запишите координаты точек, симметричных точкам A $(3; -4; 1)$, D $(-2; -9; -8)$, E $(0; 0; 3)$, F $(0; -8; 9)$ относительно: 1) начала координат; 2) плоскости xy; 3) плоскости xz; 4) оси z.

1.33. Запишите координаты точек, симметричных точкам M $(-3; 5; -1)$, N $(0; -1; 7)$, E $(4; 0; 0)$ относительно: 1) начала координат; 2) плоскости xz; 3) плоскости yz; 4) оси x.

1.34. Точки M $(4; -7; 2)$ и N симметричны относительно: 1) начала координат; 2) плоскости yz. Найдите длину отрезка MN.

1.35. Точки B_1 $(2; -3; 4)$ и C_1 $(-6; 1; 2)$ – середины сторон AC и AB треугольника ABC соответственно. Найдите координаты вершин A и B, если вершина C имеет координаты $(-3; 4; 6)$.

Упражнения для повторения

1.36. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит один из его катетов на отрезки 2 см и 8 см, считая от вершины прямого угла. Найдите стороны треугольника.

1.37. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 7 см и 11 см. Найдите периметр трапеции.

1.38. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, длины которых 15 см и 20 см соответственно. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если проекции наклонных на эту плоскость относятся как 9 : 16.

1.39. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и тупым углом α. Большая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

§ 2. Векторы в пространстве

В курсе планиметрии вы изучали векторы на плоскости. Мы приступаем к изучению векторов в пространстве. Многие понятия и свойства, связанные с векторами на плоскости, можно почти дословно отнести к векторам в пространстве. Поэтому мы здесь схематично повторим известные вам сведения о векторах, полагая, что речь идёт о векторах пространства. При этом новые свойства, возникающие в пространстве, будем изучать подробно. Отметим также, что доказательства многих утверждений о векторах пространства аналогичны доказательствам соответствующих утверждений о векторах на плоскости. В таких случаях мы ограничимся формулировками утверждений, не приводя их доказательств.

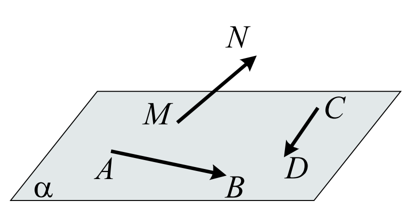
Рассмотрим отрезок AB. Если мы договоримся точку A считать **началом** отрезка, а точку B — его **концом**, то такой отрезок будет характеризоваться не только длиной, но и направлением от точки A к точке B.

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют **направленным отрезком**, или **вектором**.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор AB»).

На рисунке 2.1 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

Рис. 2.1



В отличие от отрезка, у которого концы — различные точки, у вектора начало и конец могут совпадать.

Договоримся вектор, у которого начало и конец — одна и та же точка, называть **нулевым вектором**, или **нуль-вектором**, и обозначать $\vec{0}$.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB. Обозначают: $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора $\vec{a}$ обозначают так: $|\vec{a}|$. Модуль нулевого вектора считают равным нулю. Пишут: $|\vec{0}| = 0$.

Определение

Ненулевые векторы называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

На рисунке 2.2 изображена четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ являются коллинеарными. Пишут: $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$.

Ненулевые коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** и **противоположно направленными**. Например, на рисунке 2.2 векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ сонаправлены. Пишут: $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1C_1}$. Векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{D_1B_1}$ противоположно направлены. Пишут: $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1B_1}$.

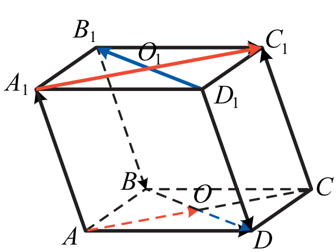
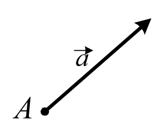
Считают, что нулевой вектор не имеет направления.

Определение

Два ненулевых вектора называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

На рисунке 2.2 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$.

На рисунке 2.3 изображён вектор $\vec{a}$ с началом в точке A. Говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен от точки** A.

Рис. 2.2	Рис. 2.3
	

Рассмотрим в координатном пространстве вектор $\vec{a}$. От начала координат отложим вектор $\overrightarrow{OA}$, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 2.4). **Координатами вектора** $\vec{a}$ называют координаты точки A. Запись $\vec{a}\,(x;\,y;\,z)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x;\,y;\,z)$.

Равные векторы имеют равные координаты, и наоборот, если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы.

Теорема 2.1

Если точки $A\,(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $B\,(x_2;\,y_2;\,z_2)$ — соответственно начало и конец вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ равны соответственно первой, второй, третьей координатам вектора $\vec{a}$.

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что ***если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\,a_2;\,a_3)$, то***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Пусть в пространстве заданы некоторая фигура F и вектор $\vec{a}$ (рис. 2.5). Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1 такую, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. В результате такого преобразования фигуры F получили фигуру F_1 (см. рис. 2.5). Такое преобразование фигуры F называют параллельным переносом на вектор $\vec{a}$.

Рис. 2.4

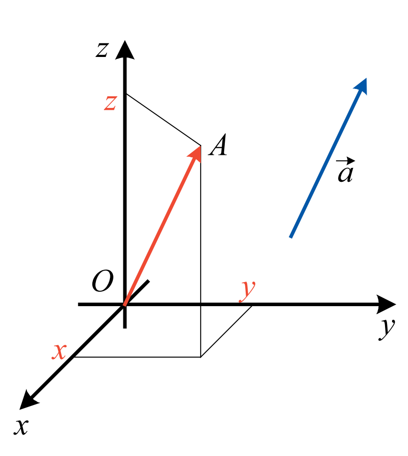
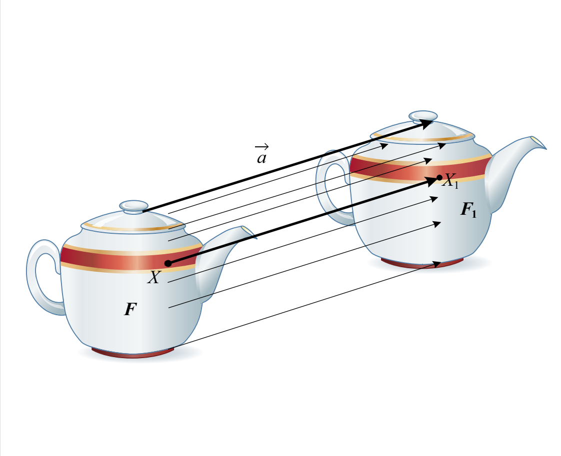


Рис. 2.5



Например, основание $A_1B_1C_1D_1$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является образом основания $ABCD$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 2.6).

Из двух любых линейных углов двугранного угла один угол является образом другого угла при параллельном переносе (рис. 2.7).

Рис. 2.6

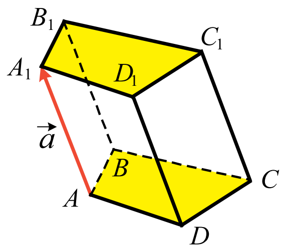
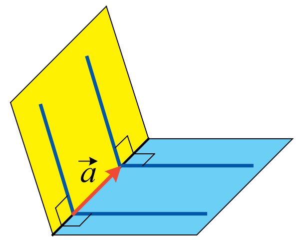


Рис. 2.7



Параллельный перенос является движением.

Если фигура F_1 – образ фигуры F при параллельном переносе, то $F_1 = F$.

1. Чем характеризуется направленный отрезок?
2. Какой отрезок называют направленным отрезком, или вектором?
3. Как обозначают вектор с началом в точке A и концом в точке B?
4. Какой вектор называют нулевым?
5. Что называют модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
6. Чему равен модуль нулевого вектора?
7. Какие векторы называют коллинеарными?
8. Как обозначают сонаправленные векторы? противоположно направленные векторы?
9. Какие два ненулевых вектора называют равными?
10. Какие два любых вектора равны?
11. Поясните, что называют координатами данного вектора.
12. Что можно сказать о координатах равных векторов?
13. Что можно сказать о векторах, соответствующие координаты которых равны?
14. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
15. Как найти модуль вектора, если известны его координаты?
16. Какое преобразование фигуры F называют параллельным переносом на вектор $\vec{a}$?

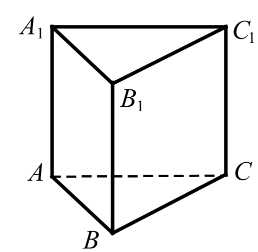
Упражнения

2.1. На рисунке 2.8 изображена правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Равны ли векторы:

1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$; 3) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$;

2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$; 4) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}$?

Рис. 2.8



2.2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
1) A (2; 3; 1), B (1; –4; 5);
2) A (–3; –2; –8), B (4; –8; –9).

2.3. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
1) A (3; –4; –7), B (–1; 5; 3);
2) A (–4; 0; 8), B (0; –6; 2).

2.4. Даны точки A (3; –2; 5), B (–4; 6; 1), C (–2; –6; –11), D (x; y; z). Найдите значения x, y и z, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

2.5. Даны точки M (–3; 2; z), N (4; –6; 3), K (x; 1; –10), E (2; y; –15). Найдите значения x, y и z, если $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EK}$.

2.6. От точки K (3; 9; –15) отложен вектор $\vec{a}$ (2; –2; 1). Найдите координаты конца вектора.

2.7. Точка K (–8; 3; –5) — конец вектора $\vec{a}$ (6; –9; 2). Найдите координаты начала вектора.

2.8. Среди векторов $\vec{a}$ (3; –4; 5), $\vec{b}$ (–4; 2; 4), $\vec{c}$ (3; $\sqrt{2}$; –5), $\vec{d}$ (1; 7; 0), $\vec{e}$ (–2; $\sqrt{5}$; –5) найдите те, которые имеют равные модули.

2.9. Среди векторов $\vec{a}$ (5; –3; 4), $\vec{b}$ (–2; 1; –7), $\vec{c}$ (2; –6; $\sqrt{10}$), $\vec{d}$ (–3; 6; 3), $\vec{m}$ (–5; 5; –2) найдите те, которые имеют равные модули.

2.10. Модуль вектора $\vec{m}$ (5; –3; z) равен 9. Найдите значение z.

2.11. Модуль вектора $\vec{n}$ (x; –10; 8) равен 13. Найдите значение x.

2.12. Найдите точки, являющиеся образами точек A (4; –1; 5), B (0; –3; –2), C (2; 0; 0), O (0; 0; 0) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (3; –2; 8).

2.13. Найдите точки, которые являются образами точек M (4; –2; 7), N (–2; 0; –1), K (0; 0; –8), O (0; 0; 0) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (–4; 2; –6).

2.14. Даны точки A (–7; 3; –2) и B (4; –5; 1). Найдите вектор, задающий параллельный перенос, при котором:
1) образом точки A является точка B;
2) образом точки B является точка A.

2.15. Даны точки M (2; –3; 7) и K (–3; –5; 0). Найдите вектор, задающий параллельный перенос, при котором:
1) образом точки M является точка K;
2) образом точки K является точка M.

2.16. Используя векторы, докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (3; –2; 5), B (–2; 7; –1), C (–4; 14; –4), D (1; 5; 2) является параллелограммом.

2.17. Даны координаты трёх вершин параллелограмма $ABCD$: A (3; –2; 1), B (–6; 4; 2), D (–3; 2; –4). Используя векторы, найдите координаты вершины C.

2.18. Даны координаты трёх вершин параллелограмма $ABCD$: A (4; –5; –2), B (2; 3; –8), D (–3; –4; 6). Используя векторы, найдите координаты вершины C.

2.19. При параллельном переносе образом точки A (–3; 1; 2) является точка A_1 (5; –1; 4). Найдите образ точки B (–4; 5; –7) при этом параллельном переносе.

2.20. Существует ли параллельный перенос, при котором образом точки K (–3; –2; 5) является точка K_1 (2; 4; 1), а образом точки F (2; –7; 4) – точка F_1 (7; –1; 8)?

2.21. Модуль вектора $\vec{p}$ равен 6, а его координаты равны. Найдите координаты вектора $\vec{p}$.

2.22. Модуль вектора $\vec{n}$ $(x; y; z)$ равен $3\sqrt{3}$, его координаты x и y равны, а координаты x и z – противоположные числа. Найдите координаты вектора $\vec{n}$.

Упражнения для повторения

2.23. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а медиана, проведённая к нему, – 5 см. Найдите гипотенузу треугольника.

2.24. Основания прямоугольной трапеции равны 18 см и 12 см, а диагональ является биссектрисой её острого угла. Вычислите площадь этой трапеции.

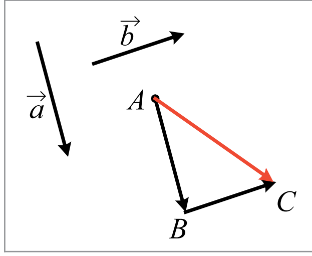
2.25. Точка A находится на расстоянии 9 см от плоскости α. Наклонные AB и AC образуют с плоскостью α углы 45° и 60°, а угол между проекциями наклонных на плоскость α равен 150°. Найдите расстояние между точками B и C.

2.26. Основание прямой призмы – ромб с диагоналями 16 см и 30 см. Большая диагональ призмы равна 50 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

§ 3. Сложение и вычитание векторов

Пусть в пространстве даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от произвольной точки A пространства вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Далее от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.1) и записывают $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Рис. 3.1



Описанный алгоритм сложения двух векторов называют **правилом треугольника**.

Можно показать, что сумма $\vec{a}+\vec{b}$ не зависит от выбора точки A.

По правилу треугольника складывают и коллинеарные векторы. На рисунке 3.2 вектор $\overrightarrow{AC}$ равен сумме коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вообще, *для любых трёх точек A, B и C выполняется равенство* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Теорема 3.1

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2; a_3)$ и $(b_1; b_2; b_3)$, то координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $(a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3)$.

Свойства сложения векторов аналогичны свойствам сложения чисел:

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство);

3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство).

Сумму трёх и большего количества векторов находят так: вначале складывают первый и второй векторы, потом к полученной сумме прибавляют третий вектор и т. д. Например, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Рис. 3.2

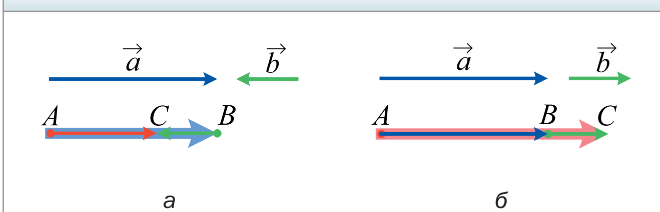
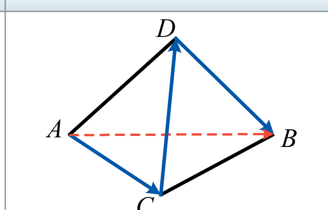


Рис. 3.3



На рисунке 3.3 изображён тетраэдр $ABCD$. Имеем: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.

Для сложения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удобно пользоваться **правилом параллелограмма**.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 3.4). Тогда искомая сумма $\vec{a} + \vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, не лежащие в одной плоскости (рис. 3.5). Найдём сумму этих векторов.

Рис. 3.4

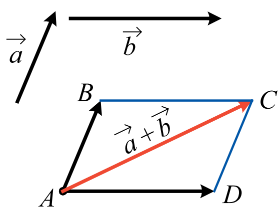
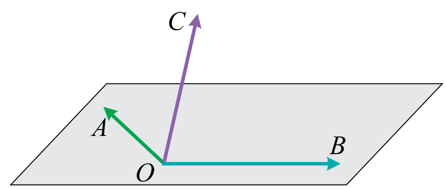
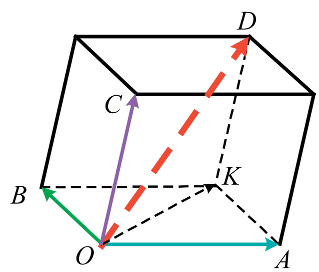


Рис. 3.5



Построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были его рёбрами (рис. 3.6). Отрезок OD является диагональю этого параллелепипеда. Докажем, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

Рис. 3.6



Поскольку четырёхугольник $OBKA$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK}$. Имеем: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC}$. Поскольку четырёхугольник $OCDK$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

Описанный способ сложения трёх векторов, отложенных от одной точки и не лежащих в одной плоскости, **называют правилом параллелепипеда**.

Определение

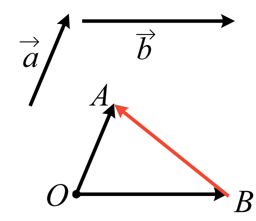
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Пишут: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Покажем, как построить вектор, равный разности данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.7). Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности $\vec{a}-\vec{b}$. Действительно, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$. Значит, по определению разности двух векторов $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$.

Рис. 3.7



По описанному алгоритму можно находить разность и коллинеарных векторов. На рисунке 3.8 вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вообще, *для любых трёх точек O, A и B выполняется равенство* $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Теорема 3.2

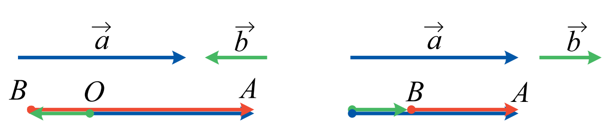
Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $(b_1;\ b_2;\ b_3)$, то координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$ равны $(a_1-b_1;\ a_2-b_2;\ a_3-b_3)$.

Определение

Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.

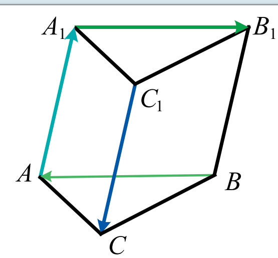
На рисунке 3.9 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$ — противоположные. Также противоположными являются, например, векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Рис. 3.8



а б

Рис. 3.9



Вектором, противоположным нулевому вектору, считают нулевой вектор.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают $-\vec{a}$.

Очевидно, что вектор $\overrightarrow{AB}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{BA}$, т. е. для любых двух точек A и B выполняется равенство $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Из правила треугольника следует, что

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Из этого равенства следует, что если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, то вектор $-\vec{a}$ имеет координаты $(-a_1;\ -a_2;\ -a_3)$.

Теорема 3.3

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Эта теорема позволяет свести вычитание векторов к сложению: чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$ (рис. 3.10).

__Пример.__ Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.11). Выразите векторы $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ через векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Рис. 3.10

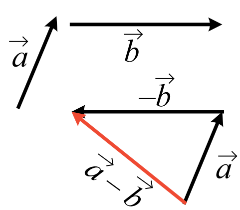
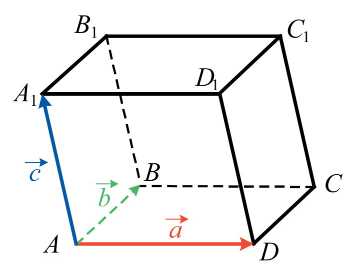


Рис. 3.11



Решение. Воспользуемся правилом параллелепипеда. Имеем:

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c};$$

$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c};$$

$$\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1D} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$ ◄

1. Опишите правило треугольника для нахождения суммы векторов.

2. Какое равенство выражает правило треугольника для нахождения суммы векторов?
3. Чему равны координаты вектора, равного сумме двух данных векторов?
4. Запишите равенства, выражающие свойства сложения векторов.
5. Опишите правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов.
6. Опишите правило параллелепипеда для нахождения суммы трёх векторов.
7. Какой вектор называют разностью двух векторов?
8. Какое равенство выражает правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки?
9. Чему равны координаты вектора, равного разности двух данных векторов?
10. Какие векторы называют противоположными?
11. Как обозначают вектор, противоположный вектору $\vec{a}$?
12. Как можно свести вычитание векторов к сложению векторов?

Упражнения

3.1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.12). Найдите сумму $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{B_1C_1}$.

3.2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.13). Найдите сумму $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DC}$.

Рис. 3.12

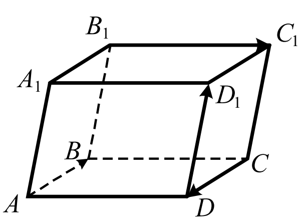
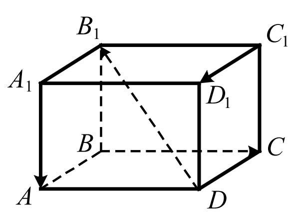


Рис. 3.13



3.3. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM}$ противоположны.

3.4. Даны векторы $\vec{a}$ (4; –5; 6) и $\vec{b}$ (–1; 2; 5). Найдите:

1) координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3.5. Даны векторы $\vec{c}\ (-3;\ 1;\ 2)$ и $\vec{d}\,(5;\ -6;\ 7)$. Найдите:
1) координаты векторов $\vec{c}+\vec{d}$ и $\vec{c}-\vec{d}$; 2) $|\vec{c}+\vec{d}|$ и $|\vec{d}-\vec{c}|$.

3.6. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB_1}$.

3.7. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{CB}$.

3.8. Сторона основания правильной пирамиды $MABCD$ равна 4 см. Найдите модуль вектора $\vec{m}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BM}$.

3.9. Найдите координаты точки C такой, что $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, где $A\ (3;\ -4;\ 1)$, $B\ (-2;\ 6;\ -3)$.

3.10. Найдите координаты точки K такой, что $\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{KN}=\vec{0}$, где $M\ (0;\ 5;\ -8)$, $N\ (-6;\ 3;\ 7)$.

3.11. Может ли быть нулевым вектором сумма трёх векторов, модули которых равны:
1) 2; 3; 4; 2) 7; 1; 8; 3) 3; 5; 9?

3.12. Даны векторы $\vec{a}\ (-2;\ 4;\ 1)$, $\vec{b}\ (3;\ -1;\ 4)$, $\vec{c}\ (1;\ -3;\ z)$. При каком значении z модуль вектора $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ принимает наименьшее значение? Найдите это значение модуля.

3.13. Даны векторы $\vec{m}\ (4;\ -2;\ 12)$, $\vec{n}\ (1;\ 3;\ 1)$, $\vec{k}\ (-1;\ y;\ -16)$. При каком значении y модуль вектора $\vec{m}-\vec{n}-\vec{k}$ принимает наименьшее значение? Найдите это значение модуля.

3.14. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите вектор $\overrightarrow{AA_1}$ через векторы $\overrightarrow{B_1A}$, $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{B_1D}$.

Упражнения для повторения

3.15. Высота AF делит сторону BC треугольника ABC на отрезки BF и CF. Найдите длину стороны AC, если $CF=\sqrt{13}$ см, $\angle ABC=60°$, а сторона AB равна 18 см.

3.16. Вычислите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной призмы, диагональ которой равна $12\sqrt{3}$ см и наклонена к плоскости основания под углом 30°.

§ 4. Умножение вектора на число. Гомотетия

Определение

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k, отличное от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$;

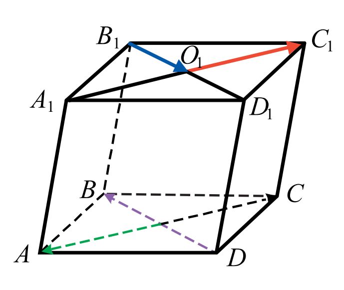
2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Пишут: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то считают, что $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунке 4.1 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Имеем: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{O_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = -2\overrightarrow{OA}$.

Рис. 4.1



Из определения следует, что:

$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Последнее равенство показывает, что при умножении вектора на -1 получаем вектор, противоположный данному.

Из определения умножения вектора на число следует, что *если $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.*

Поэтому *из равенства $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$ следует, что точки O, A и B лежат на одной прямой.*

Теорема 4.1

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Теорема 4.2.

Если координаты вектора $\vec{a}$ равны $(a_1; a_2; a_3)$, то координаты вектора $k\vec{a}$ равны $(ka_1; ka_2; ka_3)$.

Умножение вектора на число обладает такими свойствами. *Для любых чисел k, m и для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ выполняются равенства:*

$(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ (*сочетательное свойство*);

$(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ (*первое распределительное свойство*);

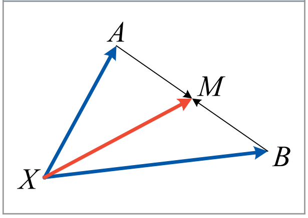
$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (*второе распределительное свойство*).

Эти свойства позволяют преобразовывать выражения, содержащие сумму векторов, их разность и произведение вектора на число, аналогично тому, как мы это делаем в алгебре. Например, $2(\vec{a}-3\vec{b})+3(\vec{a}+\vec{b}) = 2\vec{a}-6\vec{b}+$ $+\,3\vec{a}+3\vec{b} = 5\vec{a}-3\vec{b}$.

Задача 1. Пусть точка M — середина отрезка AB и X — произвольная точка пространства (рис. 4.2). Докажите, что $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})$.

Аналогичное утверждение было доказано в курсе планиметрии. Приведённое там доказательство применимо и к этой задаче (убедитесь в этом самостоятельно). ◄

Рис. 4.2



Задача 2. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC и X — произвольная точка пространства (рис. 4.3). Докажите, что $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})$.

Рис. 4.3

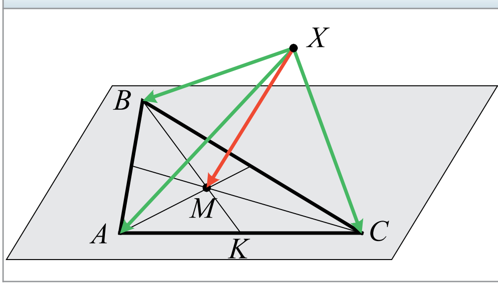
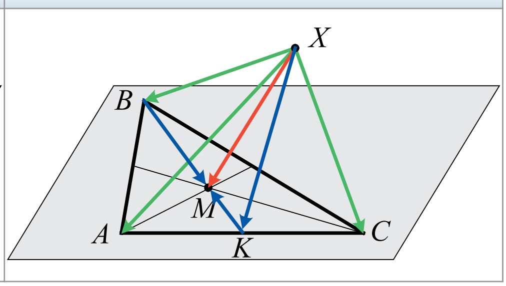


Рис. 4.4



Решение. Рассмотрим медиану BK треугольника ABC (рис. 4.4). Имеем:

$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}$;

$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XK} + \overrightarrow{KM}$.

Умножим обе части второго равенства на 2 и сложим его с первым равенством:

$3\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XK} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{KM}$.

Поскольку M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $BM = 2MK$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{BM}$ и $2\overrightarrow{KM}$ — противоположные, т. е. $\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{KM} = \vec{0}$. Тогда получаем: $3\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XK}$.

Воспользовавшись ключевой задачей 1, запишем: $\overrightarrow{XK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right)$. Отсюда $2\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}$. Имеем: $3\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}$. Отсюда $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$. ◄

Пример 1. Пусть треугольник AB_1C — сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что диагональ BD_1 параллелепипеда проходит через точку пересечения медиан треугольника AB_1C и эта точка делит диагональ в отношении 1 : 2, считая от вершины B.

Решение. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника AB_1C (рис. 4.5). Воспользовавшись ключевой задачей 2, запишем:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right).$$

По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$.

Следовательно, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}$. Значит, точки B, M и D_1 лежат на одной прямой, т. е. диагональ BD_1 проходит через точку M пересечения медиан треугольника AB_1C. Поскольку $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}$, то $BM : MD_1 = 1 : 2$. ◄

Пример 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на отрезке D_1C отметили точку M так, что $D_1M : MC = 1 : 3$. На продолжении ребра BC за точку C отметили точку N так, что $BC : CN = 4 : 3$. Докажите, что $A_1C \parallel MN$.

Решение. Рассмотрим в пространстве систему координат с началом координат в точке B, осями, содержащими рёбра BA, BC и B_1B куба, и единичными отрезками, равными ребру куба (рис. 4.6). Найдём координаты векторов $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{MN}$ и покажем, что эти векторы коллинеарны.

Рис. 4.5

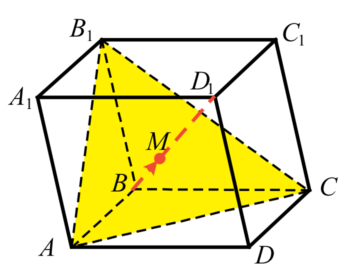
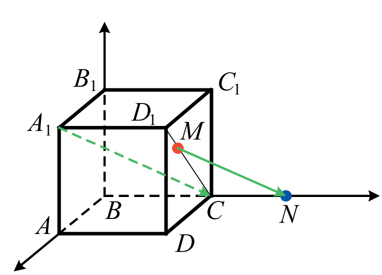


Рис. 4.6



Легко найти координаты точек A_1, C, M и N (сделайте это самостоятельно): A_1 $(1;\ 0;\ 1)$, C $(0;\ 1;\ 0)$, M $\left(\frac{3}{4};\ 1;\ \frac{3}{4}\right)$, N $\left(0;\ \frac{7}{4};\ 0\right)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{A_1C}$ равны $(-1;\ 1;\ -1)$, а вектора $\overrightarrow{MN}$ — $\left(-\frac{3}{4};\ \frac{3}{4};\ -\frac{3}{4}\right)$. Тогда $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A_1C}$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ коллинеарны. Эти векторы не принадлежат одной прямой. Значит, $\overrightarrow{A_1C} \parallel \overrightarrow{MN}$. ◄

Решая задачу, мы связали рассматриваемую фигуру (в нашем случае — это куб) с системой координат. Поставив в соответствие отдельным точкам фигуры их координаты, нам удалось доказать необходимое утверждение.

Такой метод решения задач называют **методом координат**.

Пусть точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$ (рис. 4.7, 4.8). В этом случае говорят, что точка X_1 — образ точки X при **гомотетии с центром** O и **коэффициентом** k.

Рис. 4.7

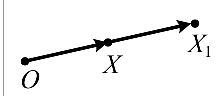
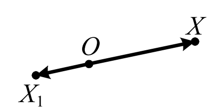


Рис. 4.8



Точку O называют **центром гомотетии**, число k — **коэффициентом гомотетии**, $k \neq 0$.

Рассмотрим фигуру F и точку O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 4.9). Такое преобразование фигуры F называют **гомотетией с центром** $\boldsymbol{O}$ **и коэффициентом** $\boldsymbol{k}$.

Например, на рисунке 4.10 большой куб гомотетичен меньшему с центром A и коэффициентом 2.

Рис. 4.9

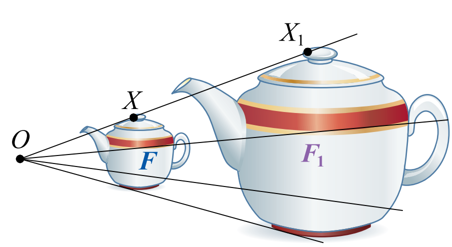
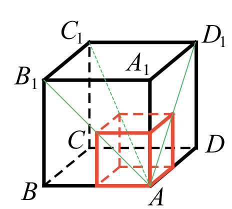


Рис. 4.10



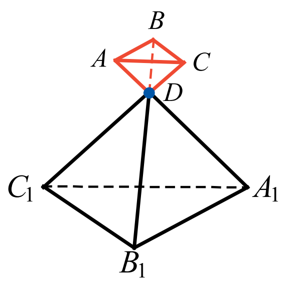
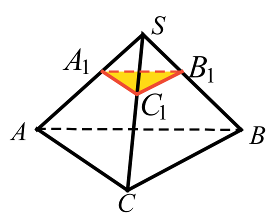
На рисунке 4.11 пирамида $ABCD$ гомотетична пирамиде $A_1B_1C_1D$ с центром D и коэффициентом $-\frac{1}{3}$.

Рассмотрим некоторые свойства гомотетии.

При гомотетии:

- образом прямой является прямая; если центр гомотетии не принадлежит прямой, то образом прямой является прямая, параллельная данной;
- образом плоскости является плоскость; если центр гомотетии не принадлежит плоскости, то образом плоскости является плоскость, параллельная данной;
- образом отрезка является отрезок;
- образом угла является угол, равный данному;
- площадь многоугольника изменяется в k^2 раз, где k — коэффициент гомотетии.

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Дальнейшие рассуждения проведём для треугольной пирамиды (рис. 4.12). Для других n-угольных пирамид рассуждения будут аналогичными.

Рис. 4.11	**Рис. 4.12**
	

Легко показать (сделайте это самостоятельно), что $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1}$.

Тогда $\overrightarrow{SA} = k\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SB} = k\overrightarrow{SB_1}$, $\overrightarrow{SC} = k\overrightarrow{SC_1}$, где $k > 0$. Следовательно, треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с центром S и коэффициентом k.

Приведённые рассуждения позволяют сделать такой вывод: *сечением пирамиды плоскостью, параллельной основанию, является многоугольник, гомотетичный основанию пирамиды*. А это в свою очередь позволяет утверждать, что *основания усечённой пирамиды — гомотетичные многоугольники*.

1. Что называют произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k \neq 0$?
2. Чему равно произведение $k\vec{a}$, если $k = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$?
3. Что можно сказать о ненулевых векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{b} = k\vec{a}$, где k — некоторое число?
4. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq \vec{0}$. Как можно выразить вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?
5. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$. Чему равны координаты вектора $k\vec{a}$?
6. Что можно сказать о векторах, координаты которых равны $(a_1; a_2; a_3)$ и $(ka_1; ka_2; ka_3)$?
7. Как связаны между собой соответствующие координаты коллинеарных векторов $\vec{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}$ $(b_1; b_2; b_3)$?
8. Запишите сочетательное и распределительные свойства умножения вектора на число.
9. В каком случае говорят, что точка X_1 является образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k?
10. Опишите преобразование фигуры F, которое называют гомотетией с центром O и коэффициентом k.
11. Сформулируйте свойства гомотетии.
12. Какая фигура является сечением пирамиды плоскостью, параллельной основанию пирамиды?

Упражнения

4.1. Даны векторы $\vec{a}$ $(2; -3; 4)$ и $\vec{b}$ $(-1; 6; 2)$. Найдите координаты вектора:
1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $3\vec{a} + 4\vec{b}$; 3) $4\vec{a} - \vec{b}$; 4) $-3\vec{a} - 2\vec{b}$.

4.2. Даны векторы $\vec{a}$ $(4; -7; -3)$ и $\vec{b}$ $(-3; 6; 22)$. Найдите координаты вектора:
1) $3\vec{a} + \vec{b}$; 2) $4\vec{a} + 6\vec{b}$; 3) $\vec{b} - 4\vec{a}$; 4) $3\vec{b} - 5\vec{a}$.

4.3. Найдите модуль вектора $\vec{c} = -3\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a}$ $(4; 0; -3)$, $\vec{b}$ $(4; -6; -3)$.

4.4. Найдите модуль вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, где $\vec{a}$ $(5; -12; 4)$, $\vec{b}$ $(1; -2; 2)$.

4.5. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{KF}$, если D $(3; -2; -5)$, E $(-1; 4; 7)$, K $(1; 3; 6)$, F $(-3; 9; 18)$?

4.6. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если A $(2; -5; 4)$, B $(1; 4; 6)$, C $(-4; -6; 8)$, D $(-2; 0; 12)$?

4.7. Образом точки A $(-2; 8; 6)$ при гомотетии с центром в начале координат является точка B $(4; -16; -12)$. Найдите коэффициент гомотетии.

4.8. Образом точки A (–12; 18; 9) при гомотетии с центром в начале координат является точка C (–4; 6; 3). Найдите коэффициент гомотетии.

4.9. Найдите среди векторов $\vec{a}$ (3; –2; 4), $\vec{b}$ (–6; 4; –8), $\vec{d}$ (–9; 6; –12), $\vec{m}$ (30; –20; 40) сонаправленные и противоположно направленные векторы.

4.10. Найдите среди векторов $\vec{m}$ (4; –3; 5), $\vec{n}$ (–8; 6; –10), $\vec{p}$ (12; –9; 15), $\vec{k}$ (–0,8; 0,6; –1) сонаправленные и противоположно направленные векторы.

4.11. Найдите значения y и z, при которых векторы $\vec{a}$ (3; y; 6) и $\vec{b}$ (–6; 4; z) коллинеарны.

4.12. Найдите значения x и y, при которых векторы $\vec{a}$ (x; –8; 12) и $\vec{b}$ (24; y; –36) коллинеарны.

4.13. Дан вектор $\vec{a}$ (–3; 2; 6). Найдите координаты вектора $\vec{b}$, противоположно направленного с вектором $\vec{a}$, если $|\vec{b}| = 21$.

4.14. Дан вектор $\vec{n}$ (–3; 4; –5). Найдите координаты вектора $\vec{m}$, сонаправленного с вектором $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 10\sqrt{2}$.

4.15. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $5\vec{a} - 7\vec{b} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены.

4.16. Для ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется равенство $4\vec{a} - 9\vec{b} + 5\vec{c} = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 6\vec{c}$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны.

4.17. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами A (2; –3; 1), B (–4; 2; 3), C (6; 1; –4), D (22; –5; –13) является трапецией.

4.18. Лежат ли точки A (2; 3; –7), B (4; 5; –1) и C (0; 1; 11) на одной прямой?

4.19. Лежат ли точки D (4; –2; –3), E (5; 1; 1) и F (7; 7; –7) на одной прямой?

4.20. Точка S находится вне плоскости треугольника ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{BM}$, где точка M – середина отрезка AC, через векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

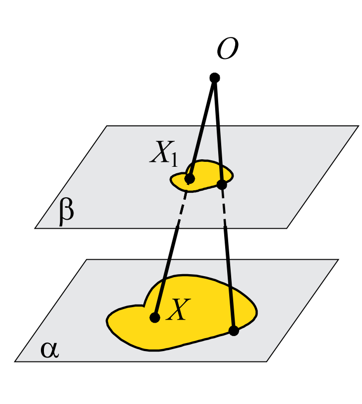
4.21. Проекцией точки S на плоскость параллелограмма $ABCD$ является точка O пересечения его диагоналей. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$.

4.22. Диагонали грани BB_1C_1C призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точке D. Выразите вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

4.23. Отрезок DP – медиана грани BCD тетраэдра $DABC$, точка M – середина отрезка DP. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

4.24. Плоскости α и β параллельны. Точка O не принадлежит этим плоскостям (рис. 4.13). Каждой точке X фигуры F, принадлежащей плоскости α, ставится в соответствие точка X_1 такая, что $X_1 = OX \cap \beta$. Докажите, что при таком преобразовании образом фигуры F является фигура F_1, гомотетичная фигуре F с центром O и коэффициентом, равным $\frac{h}{h_1}$, где h и h_1 – соответственно расстояния от точки O до плоскостей α и β.

Рис. 4.13



4.25. Докажите, что при гомотетии образом окружности является окружность.

4.26. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки E и F такие, что $BE : EA = 1 : 2$, $BF : FC = 3 : 1$. Вне плоскости треугольника ABC взяли произвольную точку P. Выразите вектор $\overrightarrow{FE}$ через векторы $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$.

4.27. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N такие, что $AM : MB = 2 : 3$, $AN : NC = 3 : 2$. Вне плоскости треугольника ABC взяли произвольную точку D. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

4.28. Отрезок BD – медиана грани AMB тетраэдра $MABC$, точка O – середина отрезка BD. Выразите вектор $\overrightarrow{CO}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AM}$.

4.29. Точка D – середина ребра AA_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$, точка K – точка пересечения отрезков BD и AB_1. Выразите вектор $\overrightarrow{CK}$ через векторы $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

4.30. Диагонали грани AA_1B_1B призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точке O. Выразите вектор $\overrightarrow{CO}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Упражнения для повторения

4.31. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\angle BAC = 30°$, AD – биссектриса. Найдите длину отрезка AD.

4.32. Две стороны треугольника относятся как $3\sqrt{2} : 7$, а угол между ними равен 45°. Найдите эти стороны, если третья сторона треугольника равна 30 см.

4.33. Треугольник ABC – равнобедренный прямоугольный с прямым углом C и гипотенузой 4 см. Отрезок CM перпендикулярен плоскости треугольника и равен 2 см. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

4.34. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Диагональ боковой грани, которая содержит гипотенузу, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь наибольшей грани призмы.

§ 5. Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два ненулевых и несонаправленных вектора. От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 5.1). Величину угла AOB будем называть **углом между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Очевидно, что если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ (рис. 5.2).

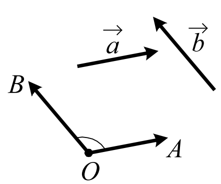
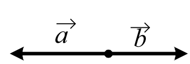
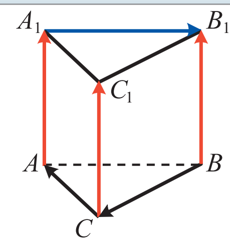
Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то также считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

Итак, для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место неравенство

$$0^\circ \le \angle(\vec{a}, \vec{b}) \le 180^\circ.$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Пишут: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

На рисунке 5.3 изображена правильная треугольная призма. Имеем: $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1B_1}) = 60^\circ$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A_1B_1}) = 120^\circ$, $\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}) = 0^\circ$, $\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$, $\angle(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}) = 180^\circ$.

Рис. 5.1	Рис. 5.2	Рис. 5.3
		

Определение

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Имеем: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то очевидно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, т. е. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Теорема 5.1

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Например, на рисунке 5.3 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$.

Теорема 5.2

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\ (a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}\ (b_1;\ b_2;\ b_3)$ можно вычислить по формуле

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Теорема 5.3

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}\ (a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $\vec{b}\ (b_1,\ b_2,\ b_3)$ можно вычислить по формуле

$$\boxed{\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Свойства скалярного произведения векторов аналогичны соответствующим свойствам произведения чисел. ***Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:***

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Эти свойства вместе со свойствами сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовывать выражения, содержащие скалярное произведение векторов, по правилам преобразования алгебраических выражений. Например,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a} + (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 =$$
$$= \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2.$$

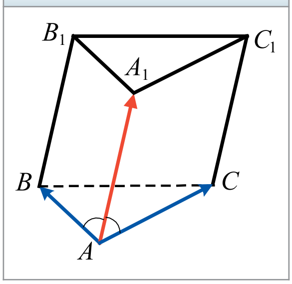


Рис. 5.4

Пример 1. Основанием наклонной призмы является равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Боковое ребро AA_1 образует равные углы с рёбрами AB и AC (рис. 5.4). Докажите, что $AA_1 \perp BC$.

Решение. Пусть $\angle BAA_1 = \alpha$. С учётом условия можно записать: $\angle CAA_1 = \alpha$.

Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$. Имеем: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Запишем: $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB} =$ $= |\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha - |\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$. Поскольку $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$, то рассматриваемое скалярное произведение равно 0. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$. ◄

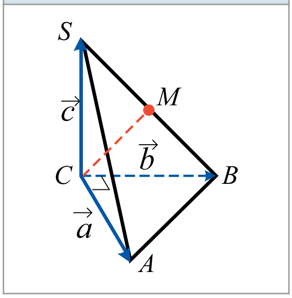


Рис. 5.5

Пример 2. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$). Ребро SC является высотой пирамиды. Найдите угол между прямыми AS и CM, где точка M — середина ребра SB, если $CA = CB = CS = m$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CS} = \vec{c}$ (рис. 5.5). По условию $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = m$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Имеем: $AS = \sqrt{CA^2 + CS^2} = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2}$,

$$CM = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+m^2} = \frac{1}{2}m\sqrt{2}.$$

Запишем $\overrightarrow{AS} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$.

Тогда: $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CM}=(\vec{c}-\vec{a})\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}^{\,2}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c})$. Поскольку скалярное произведение перпендикулярных векторов равно 0, то $\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$. Имеем:

$$\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}^{\,2}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c})=\frac{1}{2}\vec{c}^{\,2}=\frac{1}{2}|\vec{c}|^2=\frac{1}{2}m^2.$$

Пусть угол между векторами $\overrightarrow{AS}$ и $\overrightarrow{CM}$ равен α. Тогда $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CM}=|\overrightarrow{AS}|\cdot|\overrightarrow{CM}|\cos\alpha=m\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}m\sqrt{2}\cos\alpha=m^2\cos\alpha$.

Получили, что $m^2\cos\alpha=\frac{1}{2}m^2$, т. е. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Отсюда с учётом того, что $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$, получаем: $\alpha=60^\circ$. Следовательно, угол между прямыми AS и CM равен 60°. ◄

Заметим, что данную задачу можно решать методом координат: ввести систему координат с началом координат в точке C и осями, содержащими рёбра CA, CB и CS; найти координаты векторов $\overrightarrow{AS}$ и $\overrightarrow{CM}$, а затем с помощью теоремы 5.2 найти их скалярное произведение. Реализуйте этот план самостоятельно.

1. Опишите, как можно построить угол между двумя ненулевыми и несонаправленными векторами.
2. Чему равен угол между двумя противоположно направленными векторами?
3. Чему равен угол между двумя сонаправленными векторами?
4. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из них нулевой?
5. Как обозначают угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
6. В каких пределах находится угол между любыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
7. Какие векторы называют перпендикулярными?
8. Что называют скалярным произведением двух векторов?
9. Что называют скалярным квадратом вектора?
10. Чему равен скалярный квадрат вектора?
11. Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.
12. Что следует из равенства $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, если $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$?
13. Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?
14. Запишите свойства скалярного произведения векторов.

Упражнения

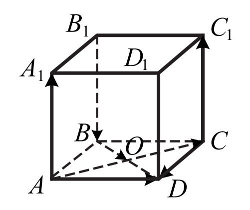


Рис. 5.6

5.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.6). Чему равен угол между векторами:

1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BO}$;
4) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$;
5) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BO}$;
6) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$;
7) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$;
8) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CD}$?

5.2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$;
2) $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$;
3) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 9$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

5.3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$;
2) $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 11$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

5.4. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$. Найдите:

1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$; 2) $(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{a}$; 3) $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot\vec{a}$.

5.5. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 135°, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 7$. Найдите:

1) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}$; 2) $(\vec{b}-2\vec{a})\cdot\vec{b}$; 3) $(2\vec{b}+5\vec{a})\cdot\vec{a}$.

5.6. Угол между единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Вычислите скалярное произведение $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$.

5.7. Угол между единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°. Вычислите скалярное произведение $(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.

5.8. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}\,(-2; 3; 1)$, $\vec{b}\,(-4; -5; 2)$;
2) $\vec{a}\,(0; 4; -7)$, $\vec{b}\,(-3; 0; 2)$;
3) $\vec{a}\,(2; -1; 4)$, $\vec{b}\,(3; 2; -1)$.

5.9. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}\,(1; -3; 8)$, $\vec{b}\,(4; -2; -6)$;
2) $\vec{a}\,(-3; -8; 9)$, $\vec{b}\,(-7; -1; -2)$;
3) $\vec{a}\,(-10; 5; 6)$, $\vec{b}\,(4; 2; 5)$.

5.10. Даны векторы $\vec{a}\,(4; -1; 5)$ и $\vec{b}\,(3; y; 2)$. При каком значении y выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b} = 14$?

5.11. Даны векторы $\vec{a}$ $(4; -2; p)$ и $\vec{b}$ $(5; p; -3)$. При каком значении p выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$?

5.12. Даны векторы $\vec{a}$ $(2; -3; 5)$ и $\vec{b}$ $(1; 2; z)$. При каком значении z векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

5.13. Даны векторы $\vec{a}$ $(6; -1; -5)$ и $\vec{b}$ $(x; 2; 2)$. При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

5.14. Даны векторы $\vec{a}$ $(2; 4; -3)$ и $\vec{b}$ $(x; 1; 6)$. При каких значениях x угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) острый; 2) прямой; 3) тупой?

5.15. Даны векторы $\vec{a}$ $(4; -7; -2)$ и $\vec{b}$ $(3; y; -1)$. При каких значениях y угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) острый; 2) прямой; 3) тупой?

5.16. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ $(2; -1; 2)$ и $\vec{b}$ $(-4; 1; 3)$.

5.17. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ $(5; -1; -2)$ и $\vec{b}$ $(2; 6; -3)$.

5.18. Найдите косинусы углов треугольника ABC и определите вид этого треугольника, если A $(1; -3; 4)$, B $(2; -2; 5)$, C $(3; 1; 3)$.

5.19. Найдите косинусы углов треугольника ABC и определите вид этого треугольника, если A $(1; -4; -1)$, B $(4; 7; 0)$, C $(-2; 1; 6)$.

5.20. Найдите углы, которые образует вектор $\overrightarrow{AB}$, где A $(5; 3; -1)$, B $(7; 1; -1)$, с положительными направлениями координатных осей.

5.21. Найдите углы, которые образует вектор $\overrightarrow{AB}$, где A $(5; -4; 2)$, B $(7; -4; -2)$, с положительными направлениями координатных осей.

5.22. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами A $(5; -3; 2)$, B $(9; -1; 3)$, C $(12; -5; -1)$, D $(8; -7; -2)$ является прямоугольником.

5.23. Найдите координаты вектора $\vec{n}$, коллинеарного вектору $\vec{k}$ $(5; -3; 4)$, если $\vec{n}\cdot\vec{k}=-100$.

5.24. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=60^\circ$. Найдите: 1) $|\vec{a}+\vec{b}|$; 2) $|2\vec{a}-3\vec{b}|$.

5.25. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=135^\circ$. Найдите: 1) $|\vec{a}+\vec{b}|$; 2) $|\vec{b}-3\vec{a}|$.

5.26. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные перпендикулярные векторы.

5.27. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=3\vec{k}+\vec{p}$ и $\vec{b}=\vec{k}-2\vec{p}$, где $\vec{k}$ и $\vec{p}$ — единичные перпендикулярные векторы.

5.28. Даны векторы $\vec{a}$ $(-2; 3; 1)$ и $\vec{b}$ $(1; 4; -3)$. Найдите значение k, при котором векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

5.29. Даны векторы $\vec{c}$ (1; –2; 8) и $\vec{d}$ (3; 1; –4). Найдите значение n, при котором векторы $n\vec{c}+\vec{d}$ и $\vec{c}$ перпендикулярны.

5.30. Даны точки A (1; 5; 8), B (5; 2; 9), C (7; 4; 7) и D (8; 3; 0). Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости BCD.

5.31. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, $AC = BC = AA_1 = a$, $\angle ACB = 120°$, точки M и K – середины рёбер AC и BB_1 соответственно. Найдите: 1) отрезок MK; 2) угол между прямыми MK и AA_1.

5.32. В пирамиде $DABC$ боковое ребро DA перпендикулярно плоскости основания ABC, $AC = AD = a$, $AB = a\sqrt{2}$, $\angle BAC = 135°$. Точки M и K – середины рёбер AB и CD соответственно. Найдите: 1) отрезок MK; 2) угол между прямыми AD и MK.

Упражнения для повторения

5.33. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону на отрезки длиной 3 см и 5 см, считая от вершины острого угла. Вычислите площадь параллелограмма, если его острый угол равен 60°.

5.34. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) O – точка пересечения её диагоналей. Найдите отношение площадей треугольников BOC и AOD, если $BC = 3$ см, $AD = 7$ см.

5.35. Угол между плоскостями треугольников ABC и ABD равен 45°. Треугольник ABC – равносторонний со стороной $4\sqrt{3}$ см, треугольник ABD – равнобедренный, $AD = BD = \sqrt{14}$ см. Найдите длину отрезка CD.

5.36. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

§ 6. Геометрическое место точек пространства. Уравнение плоскости

В курсе планиметрии вы ознакомились с понятием геометрического места точек. Аналогичное понятие рассматривают и в стереометрии.

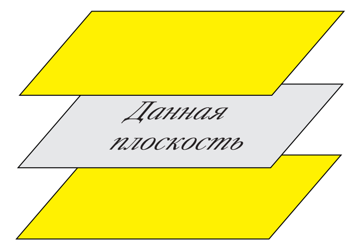
Определение

Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество точек пространства, обладающих определённым свойством.

Образно ГМТ можно представить так: задают некоторое свойство, а потом все точки пространства, обладающие этим свойством, красят в жёлтый цвет. Та «жёлтая фигура», которая при этом образовалась, и будет ГМТ.

Например, геометрическим местом точек, удалённых от данной плоскости на заданное расстояние, являются две плоскости, параллельные данной (рис. 6.1).

Рис. 6.1



ГМТ, равноудалённых от трёх данных точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, является прямая l, перпендикулярная плоскости ABC и проходящая через точку O – центр описанной окружности треугольника ABC (рис. 6.2).

Действительно, точка O равноудалена от точек A, B и C. Каждая точка X прямой l, отличная от точки O, также равноудалена от точек A, B и C (это следует из равенства треугольников XOA, XOB, XOC). И наоборот, если точка X равноудалена от точек A, B и C, то она принадлежит прямой l. Это следует из ключевой задачи 4 § 10 учебника «Геометрия. 10 класс».

Точно так же доказывается, что ГМТ, равноудалённых от вершин данного многоугольника, вокруг которого можно описать окружность, является прямая, перпендикулярная плоскости этого многоугольника и проходящая через центр его описанной окружности (рис. 6.3).

Рис. 6.2

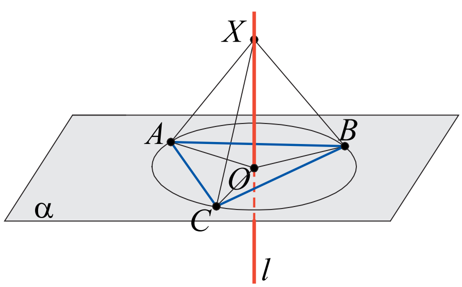
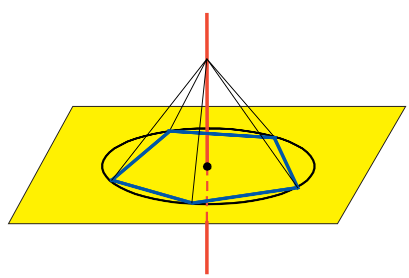


Рис. 6.3



Напомним: чтобы утверждать, что какое-то множество точек является ГМТ, надо доказать две взаимно обратные теоремы:

1) каждая точка данного множества обладает заданным свойством;

2) если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит данному множеству.

Рассмотрим теорему, являющуюся пространственным аналогом теоремы о ГМТ плоскости, равноудалённых от концов отрезка.

Теорема 6.1

Плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину, является ГМТ, равноудалённых от концов этого отрезка.

Доказательство

1) Пусть плоскость α перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину — точку M; точка X — произвольная точка плоскости α.

Если точка X совпадает с точкой M, то $XA = XB$.

Пусть точка X не совпадает с точкой M (рис. 6.4). Тогда в плоскости AXB прямая MX является серединным перпендикуляром отрезка AB. Следовательно, $XA = XB$.

2) Пусть некоторая точка Y равноудалена от концов отрезка AB. Тогда в плоскости AYB прямая MY является серединным перпендикуляром отрезка AB. Предположим, что $Y \notin \alpha$. Пусть $AYB \cap \alpha = a$ (рис. 6.5). Очевидно, что $AB \perp a$. Тогда в плоскости AYB через точку M проходят две прямые, перпендикулярные прямой AB. Получили противоречие. Значит, $Y \in \alpha$. ◄

Рис. 6.4

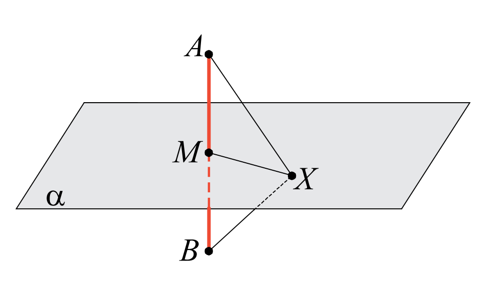
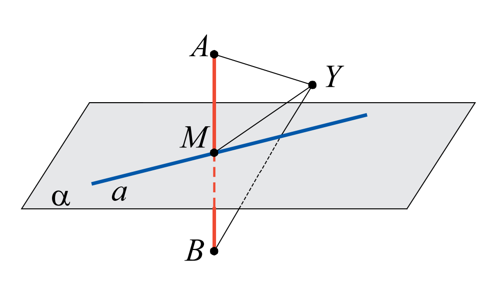


Рис. 6.5

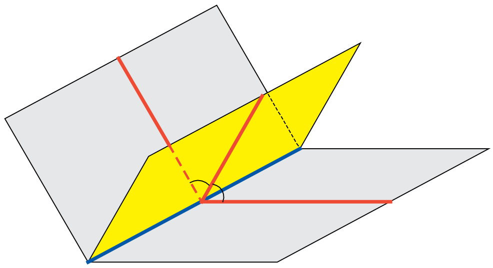
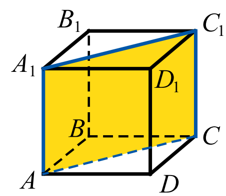


Определение

Биссектором двугранного угла называют полуплоскость, границей которой является ребро двугранного угла, делящая его на два равных двугранных угла (рис. 6.6)**.**

Биссектор является пространственным аналогом биссектрисы угла.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ полуплоскость, содержащая диагональное сечение AA_1C_1C, является биссектором двугранного ребра куба при ребре AA_1 (рис. 6.7).

Рис. 6.6	**Рис. 6.7**
	

🗹 **Теорема 6.2**

Биссектор двугранного угла является ГМТ, принадлежащих двугранному углу и равноудалённых от его граней.

Эта теорема является пространственным аналогом теоремы о ГМТ угла, равноудалённых от его сторон. Докажите эту теорему самостоятельно.

Из курса планиметрии вы знакомы с понятием уравнения фигуры, заданной на координатной плоскости. Аналогично можно рассматривать уравнение фигуры в пространстве.

Рассмотрим уравнение с тремя переменными:

$$P(x; y; z) = 0.$$

Его решениями являются упорядоченные тройки чисел $(x; y; z)$. Например, тройка чисел $(-1; -1; 1)$ является решением уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Действительно, если вместо переменных x, y, z подставить соответственно их значения -1, -1, 1, то получим верное числовое равенство.

🗹 **Определение**

Уравнением фигуры F, заданной в координатном пространстве xyz, называют уравнение с тремя переменными x, y, z, обладающее следующими свойствами:
1) если точка принадлежит фигуре F, то её координаты $(x; y; z)$ являются решением данного уравнения;
2) любое решение $(x; y; z)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Теорема 6.3

Уравнение плоскости имеет вид

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0,}$$

где a, b, c и d — некоторые числа, причём a, b и c не равны нулю одновременно.

Доказательство

Для того чтобы вывести уравнение плоскости, рассмотрим её как ГМТ, равноудалённых от двух данных точек.

Пусть α – данная плоскость. Выберем две точки $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ такие, чтобы плоскость α была перпендикулярна отрезку AB и проходила через его середину (рис. 6.8).

Пусть $M\ (x;\ y;\ z)$ – произвольная точка плоскости α. Тогда в силу теоремы 6.1 $MA = MB$, т. е.

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}\ . \quad (*)$$

Мы показали, что координаты $(x;\ y;\ z)$ произвольной точки M плоскости α являются решением уравнения (*).

Пусть $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – произвольное решение уравнения (*). Тогда

$$\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2} = \sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2}\ .$$

Это равенство означает, что точка $N\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ равноудалена от точек $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Следовательно, в силу теоремы 6.1 $N \in \alpha$.

Итак, мы доказали, что уравнение (*) является уравнением плоскости α. Преобразуем это уравнение. Имеем:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2.$$

Возведём все двучлены в квадрат и приведём подобные слагаемые. Получим:

$$2(x_2-x_1)x + 2(y_2-y_1)y + 2(z_2-z_1)z = x_2^2+y_2^2+z_2^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2.$$

Обозначив $2(x_2-x_1)=a$, $2(y_2-y_1)=b$, $2(z_2-z_1)=c$, $x_2^2+y_2^2+z_2^2-$ $-x_1^2-y_1^2-z_1^2=d$, получим уравнение $ax+by+cz+d=0$.

Поскольку точки $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ различны, то хотя бы одна из разностей x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 не равна нулю. Значит, числа a, b, c не равны нулю одновременно. ◄

Очевидно, что если уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz=0$, то эта плоскость проходит через начало координат.

Будем говорить, что вектор $\overrightarrow{AB}$ **перпендикулярен** прямой a (плоскости α), если прямая AB перпендикулярна прямой a (плоскости α). Пишут: $\overrightarrow{AB} \perp a$, $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$.

Теорема 6.4

Вектор $\overrightarrow{AB}$ (a; b; c) перпендикулярен плоскости α, уравнение которой имеет вид $ax + by + cz + d = 0$.

Доказательство

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\overrightarrow{MN}$, принадлежащий плоскости α (рис. 6.9). Пусть точки M и N имеют координаты (x_1; y_1; z_1) и (x_2; y_2; z_2). Тогда вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты ($x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$). Поскольку точки M и N принадлежат плоскости α, то выполняются равенства

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0,$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0.$$

Рис. 6.8

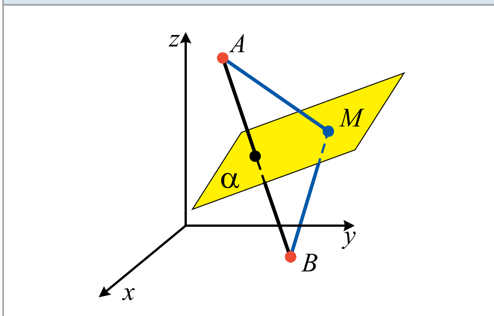
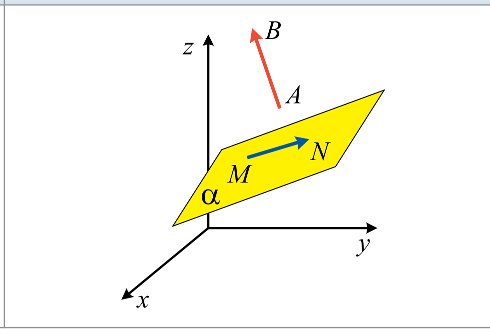


Рис. 6.9



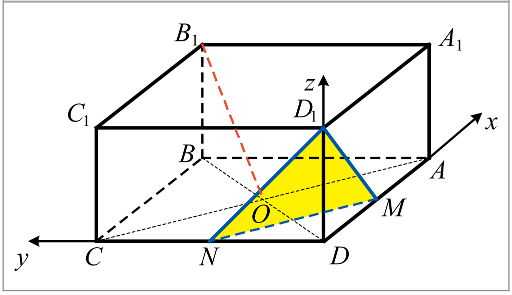
Вычтем из второго равенства первое. Получим:
$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$

Из этого равенства следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ перпендикулярны. Тем самым мы показали, что вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен произвольной прямой MN, принадлежащей плоскости α. Следовательно, $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$. ◄

Пример. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2 дм, а боковое ребро — 1 дм. Докажите, что прямая OB_1 перпендикулярна плоскости MD_1N, где O — центр нижнего основания, M и N — середины соответственно рёбер AD и CD.

Решение. Рассмотрим систему координат с началом координат в точке D и осями с единичным отрезком 1 дм, содержащими рёбра DA, DC и DD_1 (рис. 6.10). Точки M, N и D_1 имеют соответственно координаты (1; 0; 0), (0; 1; 0); (0; 0; 1).

Рис. 6.10



Пусть уравнение плоскости MD_1N имеет вид $ax + by + cz + d = 0$. Подставим в это уравнение координаты точек M, N и D_1. Получим: $a + d = 0$, $b + d = 0$, $c + d = 0$. Отсюда $a = b = c = -d$. Тогда уравнение плоскости MD_1N приобретает такой вид: $-dx - dy - dz + d = 0$.

Поскольку плоскость MD_1N не проходит через начало координат, то $d \neq 0$. Тогда $-x - y - z + 1 = 0$. Следовательно, уравнение плоскости MD_1N имеет вид $x + y + z - 1 = 0$.

Точки O и B_1 имеют соответственно координаты (1; 1; 0) и (2; 2; 1). Тогда вектор $\overrightarrow{OB_1}$ имеет координаты (1; 1; 1). В силу теоремы 6.4 вектор $\overrightarrow{OB_1}$ перпендикулярен плоскости MD_1N. ◄

1. Какое множество точек называют геометрическим местом точек?
2. Какие две теоремы надо доказать, чтобы иметь право утверждать, что некоторое множество точек является геометрическим местом точек?
3. Что является геометрическим местом точек, удалённых от данной плоскости на заданное расстояние?
4. Что является геометрическим местом точек, равноудалённых от трёх данных точек, не лежащих на одной прямой?
5. Что является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка?
6. Что называют биссектором двугранного угла?
7. Что является геометрическим местом точек, принадлежащих двугранному углу и равноудалённых от его граней?
8. Что называют уравнением фигуры F, заданной в координатном пространстве xyz?
9. Какой вид имеет уравнение плоскости?
10. Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящей через начало координат?
11. Какой вектор $\overrightarrow{AB}$ называют перпендикулярным прямой a? плоскости α?

12. Какой вид имеет уравнение плоскости, которой перпендикулярен вектор $\overrightarrow{AB}$ $(a; b; c)$?

Упражнения

6.1. Принадлежит ли плоскости $2x - 3y + z + 5 = 0$ точка:
1) A (1; 2; –1); 2) B (3; 0; 1); 3) C (5; 1; –12)?

6.2. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от точек данной окружности.

6.3. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от сторон квадрата.

6.4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A (2; 3; –1) и перпендикулярной прямой BC, если:
1) B (1; 0; –1), C(–3; 1; –2);
2) B (–1; 0; 0), C (0; 1; –3).

6.5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{m}$ (–6; 3; 12).

6.6. Составьте уравнение плоскости, если точка A (3; 5; 4) является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость.

6.7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M (0; 3; 0) и перпендикулярной оси ординат.

6.8. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку K (0; 0; –2) и параллельной плоскости xy.

6.9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки M (–8; 0; 0) и N (0; 0; 5) и перпендикулярной плоскости xy.

6.10. Точка N не принадлежит плоскости $x - y - z - 3 = 0$. Докажите, что вектор $\overrightarrow{n}$ (3; –1; 4), отложенный от точки N, параллелен данной плоскости.

6.11. Найдите уравнение геометрического места точек, равноудалённых от точек M (–7; 2; 5) и N (3; –4; 1).

6.12. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A (2; 2; 0) и B (0; 2; 0) и параллельной оси аппликат.

6.13. Найдите уравнение геометрического места точек, содержащего точку M (2; 3; –1), таких, что прямая, проходящая через точки A (2; –6; 4) и B (6; –3; 5), перпендикулярна каждой прямой, которая проходит через точку M.

6.14. Найдите уравнение геометрического места точек, содержащего точку $M(-5; 2; -9)$, таких, что прямая, проходящая через точки $A(7; -8; 20)$ и $C(5; -2; 16)$, перпендикулярна каждой прямой, проходящей через точку M.

Упражнения для повторения

6.15. Через середину диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, которая пересекает стороны BC и AD прямоугольника в точках M и K соответственно, $AC = 15$ см, $AK = 4$ см, $KD = 8$ см. Вычислите площадь четырёхугольника $AMCK$.

6.16. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 12 см, а расстояние от центра этой окружности до вершины треугольника — 20 см. Найдите периметр данного треугольника.

6.17. Равнобедренные треугольники MPK и MEK имеют общее основание MK. Найдите угол между плоскостями данных треугольников, если $MK = 24$ см, $PK = 6\sqrt{6}$ см, $KE = 13$ см, $PE = \sqrt{37}$ см.

6.18. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 4 см, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Когда сделаны уроки

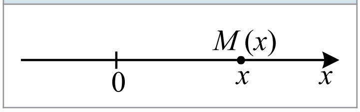
Четырёхмерный куб

Читая фантастические рассказы, вы, конечно, встречались с историями, когда путешественники за доли секунды преодолевали значительные расстояния, воспользовавшись «движением по гиперпространству». Вероятно, вы также слышали, что в математике изучают геометрию не только двумерного (планиметрия) или трёхмерного (стереометрия) пространств, но и пространств большей размерности, о которых и идёт речь в фантастических произведениях.

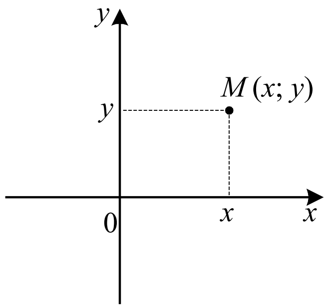
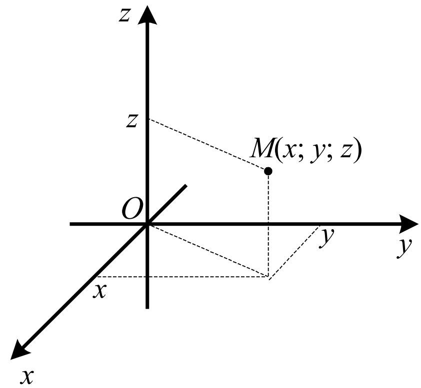
Оказывается, изученные вами понятия координат и векторов могут служить замечательным инструментом для исследования многомерных пространств. В этом рассказе мы поговорим о четырёхмерном пространстве.

Вы знаете, что каждой точке координатной прямой (одномерного пространства) соответствует число x — координата этой точки (рис. 6.11). Каждой точке двумерного пространства можно поставить в соответствие

Рис. 6.11



пару чисел $(x; y)$ – координаты этой точки (рис. 6.12). Каждой точке трёхмерного пространства можно поставить в соответствие тройку чисел $(x; y; z)$ – координаты этой точки (рис. 6.13). Аналогично рассуждают и о точке четырёхмерного пространства.

Рис. 6.12	Рис. 6.13
	

Определение

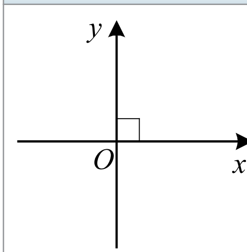
Точкой четырёхмерного пространства называют четвёрку чисел $(x; y; z; t)$.

Числа x, y, z и t называют соответственно первой, второй, третьей и четвёртой координатами точки.

Поскольку точку четырёхмерного пространства определяют через её координаты, то попробуем представить систему координат четырёхмерного пространства. Конечно, рассуждать о четырёхмерном пространстве непросто, поскольку в нашем бытовом опыте мы не встречаемся с такими объектами. Тем не менее переход от трёхмерного пространства к четырёхмерному легче осуществить, если проследить за аналогичными переходами от одномерного пространства к двумерному и от двумерного к трёхмерному.

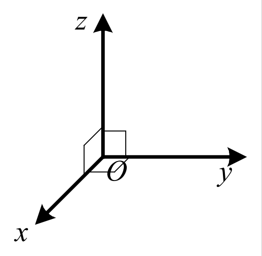
В одномерном пространстве система координат задаётся одной координатной прямой – осью x (см. рис. 6.11). Для построения системы координат на плоскости к этой прямой в её начале координат проводят перпендикулярную координатную прямую – ось y (рис. 6.14). В стереометрии добавляется ещё одна координатная прямая – ось z, перпендикуляр-

Рис. 6.14



ная каждой из двух других осей. Систему координат трёхмерного пространства изображают на плоскости (рис. 6.15). При этом нас не смущает то, что на изображении (см. рис. 6.15) фактический угол, например между осями x и z, отличается от прямого.

Рис. 6.15



Точно так же для построения системы координат в четырёхмерном пространстве через начало трёхмерной системы координат нужно провести ещё одну прямую – четвёртую координатную ось t, перпендикулярную каждой из трёх других осей. На рисунке 6.16 изображена на плоскости система координат четырёхмерного пространства. Отметим, что, находясь только в трёхмерном пространстве, такую четвёртую прямую провести невозможно, точно так же, как на плоскости невозможно провести третью прямую, перпендикулярную двум осям двумерной системы координат.

Если из четырёх координатных осей x, y, z, t выбрать любые три, например x, z, t, то получится привычная трёхмерная система координат (рис. 6.17).

Рис. 6.16

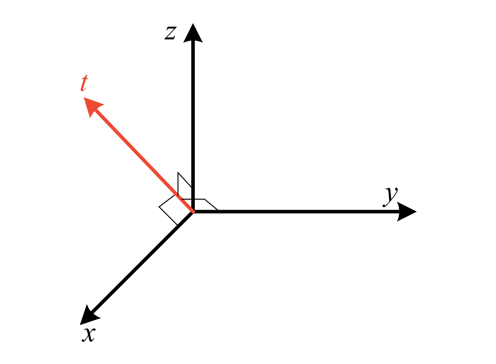
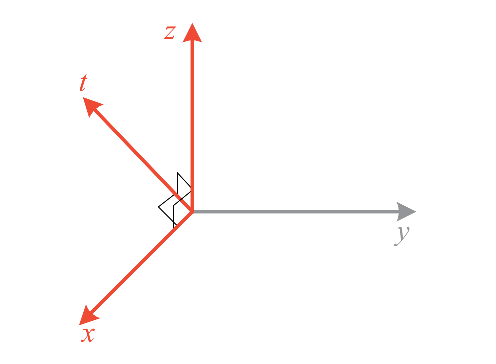


Рис. 6.17



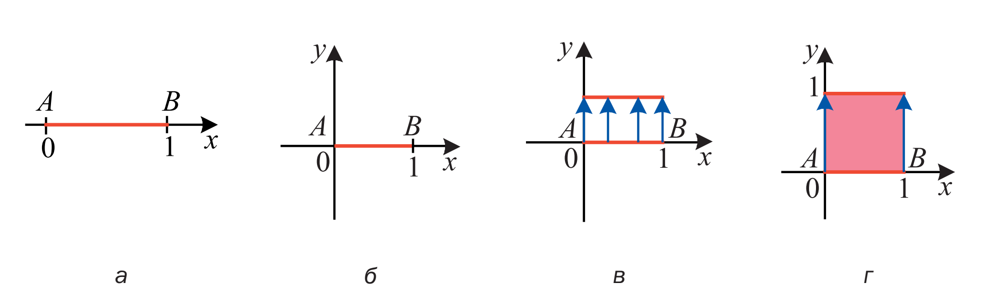
Попытаемся в четырёхмерной системе координат изобразить четырёхмерный куб – четырёхмерный аналог квадрата на плоскости и куба в пространстве. Для этого опять будем рассуждать, переходя от одномерного пространства к двух-, трёх- и, наконец, к четырёхмерному.

Отметим на координатной прямой x отрезок AB длиной 1 см (рис. 6.18, *а*). Координаты x точек этого отрезка удовлетворяют двойному неравенству $0 \le x \le 1$.

Размести́м этот же отрезок в двумерном пространстве xy (рис. 6.18, *б*). Будем параллельно переносить этот отрезок в направлении оси y

(рис. 6.18, *в*). Если отрезок AB перенести на 1 см в направлении оси y, то получится квадрат (рис. 6.18, *г*). При этом исходный отрезок AB будет стороной этого квадрата.

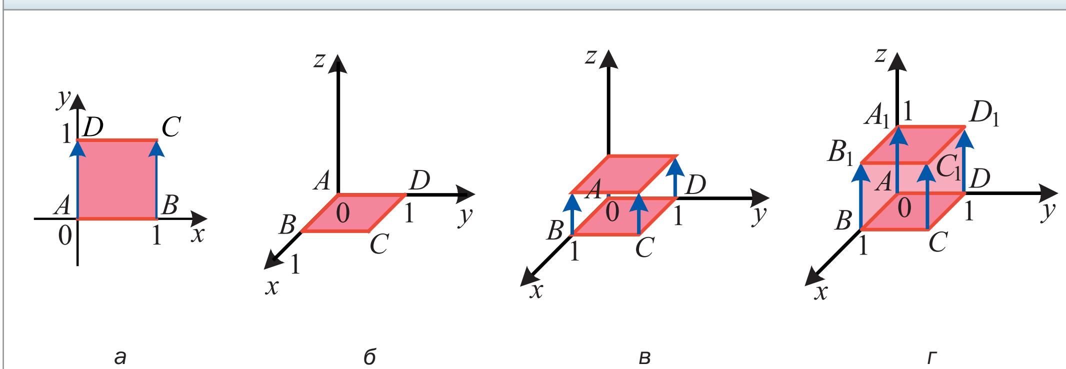
Рис. 6.18



Рассмотрим теперь квадрат $ABCD$ со стороной, равной 1 см (рис. 6.19, *а*). Координаты (x, y) точек этого квадрата удовлетворяют системе $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$ Разместим этот же квадрат в трёхмерном пространстве xyz (рис. 6.19, *б*).

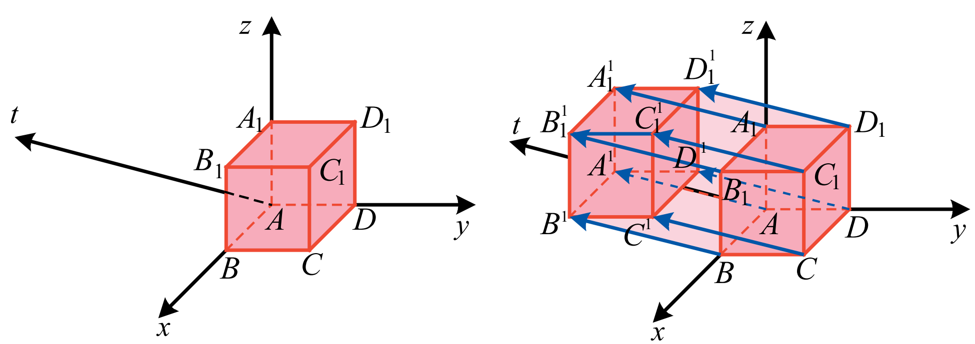
Будем параллельно переносить этот квадрат в направлении оси z (рис. 6.19, *в*). Если квадрат $ABCD$ перенести на 1 см в направлении оси z, то получится куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.19, *г*). При этот исходный отрезок AB будет ребром этого куба, а квадрат $ABCD$ – гранью куба.

Рис. 6.19



Для построения четырёхмерного куба будем опираться на подмеченную закономерность. Рассмотрим трёхмерный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в четырёхмерном пространстве $xyzt$ (рис. 6.20, *а*). Координаты $(x;\ y;\ z)$ точек этого куба удовлетворяют системе $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le z \le 1. \end{cases}$ Будем параллельно переносить этот куб в направлении оси t. Если куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перенести на 1 см в направлении оси t, то получим четырёхмерный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1A^1B^1C^1D^1A_1^1B_1^1C_1^1D_1^1$ (рис. 6.20, *б*). При этом исходный отрезок AB будет его ребром, квадрат $ABCD$ – гранью, а куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – так называемой **гипергранью**. Координаты $(x;\ y;\ z;\ t)$ точек этого четырёхмерного куба удовлетворяют системе $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le z \le 1, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$

Рис. 6.20



а *б*

Можно подсчитать, что четырёхмерный куб содержит 16 вершин, 32 ребра (одномерных отрезка), 24 грани (двумерных квадрата) и 8 гиперграней (трёхмерных кубов). Чтобы лучше разобраться с геометрией четырёхмерного куба, попробуйте самостоятельно найти координаты вершин, а также координаты точек, лежащих на рёбрах, гранях и гипергранях этого куба.

Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ и $\vec{a}$ (4; –2; 0).

А) $\vec{c}$ (–2; 1; 0) В) $\vec{c}$ (2; –1; 0)

Б) $\vec{c}$ (–2; –1; 0) Г) $\vec{c}$ (2; 1; 0)

2. Найдите модуль вектора $\vec{a}$ (–5; 1; 2).

А) 8 Б) 30 В) $\sqrt{30}$ Г) $\sqrt{8}$

3. Точка C – середина отрезка AB, A (2; 4; 6), C (0; 1; 10). Найдите координаты точки B.

А) B (1; 2,5; 8) В) B (–2; –3; 4)

Б) B (–2; –2; 14) Г) B (2; 6; 26)

4. Какая из точек A (7; 9; 0); B (0; –8; 6); C (–4; 0; 5) принадлежит координатной плоскости xz?

А) точка A В) точка C

Б) точка B Г) ни одна из данных точек

5. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{MK}$, если M (10; –4; 2), K (16; 2; –5).

А) $\overrightarrow{MK}$ (–6; –6; 7) В) $\overrightarrow{MK}$ (6; 6; –7)

Б) $\overrightarrow{MK}$ (16; –2; –3) Г) $\overrightarrow{MK}$ (6; –2; –3)

6. Найдите длину отрезка CD, если C (6; –3; 2), D (4; 1; 4).

А) 24 Б) $2\sqrt{6}$ В) 8 Г) $4\sqrt{6}$

7. Какая из точек принадлежит оси x?

А) A (0; 1; 0) В) C (–1; 0; 0)

Б) B (0; 0; 4) Г) D (1; 2; 0)

8. При каком значении n векторы $\vec{a}$ (8; –12; 20) и $\vec{b}$ (2; n; 5) коллинеарны?

А) 3 Б) –3 В) –4 Г) такого значения не существует

9. При каком значении n векторы $\vec{a}$ (4; $2n - 1$; –1) и $\vec{b}$ (4; $9 - 3n$; –1) равны?

А) –2 Б) 8 В) 2 Г) –8

10. Какой из данных векторов коллинеарен вектору $\vec{a}$ (–4; 18; 6)?

А) $\vec{b}$ (2; 9; –3) В) $\vec{m}$ (2; –9; 3)

Б) $\vec{c}$ (2; –9; –3) Г) $\vec{n}$ (–2; 9; –3)

11. При каком значении n векторы $\vec{a}$ (1; n; 2) и $\vec{b}$ (–2; 1; n) перпендикулярны?

А) $-\frac{3}{2}$ Б) $\frac{3}{2}$ В) $-\frac{2}{3}$ Г) $\frac{2}{3}$

12. Относительно какой из данных точек симметричны точки A (–2; 3; 4) и B (0; –1; –6)?

А) C (–2; 4; –10) В) E (1; 1; –2)
Б) D (–1; 1; –1) Г) F (–2; 2; –2)

13. Даны векторы $\vec{a}$ (–4; 2; –1) и $\vec{b}$ (3; 1; 4). Найдите координаты вектора $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

А) $\vec{n}$ (–1; 3; 3) В) $\vec{n}$ (–11; 5; 2)
Б) $\vec{n}$ (–3; 5; 3) Г) $\vec{n}$ (–5; 5; 2)

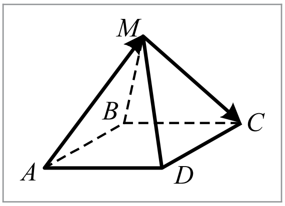
14. Даны точки A (1; 6; 4), B (3; 2; 5), C (0; –1; 1); D (2; –5; 2). Какое из утверждений верно?

А) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ В) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$
Б) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ Г) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

15. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ (1; 0; –1) и $\vec{b}$ (0; –1; 1).

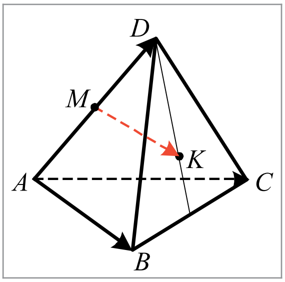
А) 60° Б) 120° В) 45° Г) 135°

16. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$, изображённой на рисунке, равна 2. Чему равен модуль суммы $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$?



А) 1 Б) $\sqrt{2}$ В) 2 Г) $2\sqrt{2}$

17. Точка M – середина ребра AD пирамиды $DABC$, точка K – точка пересечения медиан грани BDC. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.



А) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Б) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

В) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Г) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

18. Укажите уравнение плоскости, проходящей через точку A (1; –2; 3) перпендикулярно прямой CD, где C (6; 4; –5), D (4; 6; –7).

А) $x + y - z - 6 = 0$ В) $x - y + z - 6 = 0$
Б) $x - y + z + 6 = 0$ Г) $x + y - z + 6 = 0$

Итоги главы 1

Расстояние между точками

Расстояние между точками $A\,(x_1; y_1; z_1)$ и $B\,(x_2; y_2; z_2)$ можно найти по формуле $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Координаты середины отрезка

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Взаимное расположение двух векторов

Ненулевые векторы называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Два ненулевых вектора называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.

Координаты вектора

Если точки $A\,(x_1; y_1; z_1)$ и $B\,(x_2; y_2; z_2)$ — соответственно начало и конец вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ равны соответственно первой, второй, третьей координатам вектора $\vec{a}$.

Модуль вектора

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2; a_3)$, то
$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Операции с векторами

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k, отличное от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что: 1) $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$; 2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2; a_3)$ и $(b_1; b_2; b_3)$, то:

- **координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;**
- **координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$ равны $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;**
- **координаты вектора $k\vec{a}$ равны $(ka_1; ka_2; ka_3)$;**
- **скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;**
- $\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ **(где векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые).**

Гомотетия

Пусть точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$. В этом случае говорят, что точка X_1 — образ точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k. Точку O называют центром гомотетии, число k — коэффициентом гомотетии.

Преобразование фигуры F, при котором каждой точке X фигуры F ставят в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k, называют гомотетией с центром O и коэффициентом k.

Биссектор двугранного угла

Биссектором двугранного угла называют полуплоскость, границей которой является ребро двугранного угла, делящая его на два равных двугранных угла.

Фигуры в пространстве как ГМТ

Плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину, является ГМТ, равноудалённых от концов этого отрезка.

Биссектор двугранного угла является ГМТ, принадлежащих двугранному углу и равноудалённых от его граней.

Уравнение фигуры

Уравнением фигуры F, заданной в координатном пространстве xyz, называют уравнение с тремя переменными x, y, z, обладающее следующими свойствами:

1) если точка принадлежит фигуре F, то её координаты (x; y; z) являются решением данного уравнения;

2) любое решение (x; y; z) данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Уравнение плоскости

Уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, где a, b, c и d — некоторые числа, причём a, b и c не равны нулю одновременно.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ (a; b; c) перпендикулярен плоскости α, уравнение которой имеет вид $ax + by + cz + d = 0$.

Глава 2. Тела вращения

В этой главе вы подробнее познакомитесь с уже известными вам телами – цилиндром, конусом, шаром, изучите их свойства. Узнаете, каким бывает взаимное расположение этих тел и многогранников.

§ 7. Цилиндр

Пусть вектор $\vec{a}$ перпендикулярен плоскости α. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ окружности, принадлежащей плоскости α. Образом этой окружности является равная ей окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости α (рис. 7.1). Пусть X – произвольная точка окружности с центром в точке O, а точка X_1 – образ точки X при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Тогда $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$ и точка X_1 принадлежит окружности с центром в точке O_1. Следовательно, все отрезки, которые параллельны вектору $\vec{a}$ и концы которых лежат на рассматриваемых окружностях, равны между собой и перпендикулярны плоскости α. Эти отрезки образуют **цилиндрическую поверхность**. Каждый из этих отрезков называют **образующей цилиндрической поверхности**.

Окружности с центрами O и O_1 ограничивают два равных круга. Тело, ограниченное этими кругами и цилиндрической поверхностью, называют **цилиндром**. Цилиндрическую поверхность называют **боковой поверхностью цилиндра**, круги – **основаниями цилиндра**, образующие цилиндрической поверхности – **образующими цилиндра**.

Очевидно, что все образующие цилиндра равны и перпендикулярны плоскости основания.

Прямую, проходящую через центры оснований цилиндра, называют **осью цилиндра**. На рисунке 7.1 прямая OO_1 – ось цилиндра. Отрезок оси цилиндра, заключённый между его основаниями, перпендикулярен основаниям и равен образующей цилиндра. На рисунке 7.1 $OO_1 = XX_1$.

Высотой цилиндра называют перпендикуляр, проведённый из любой точки плоскости одного основания на плоскость другого основания. Любая образующая цилиндра является его высотой.

Телом вращения называют тело, полученное в результате вращения некоторой плоской фигуры вокруг прямой. Эту прямую называют **осью вращения**.

Рис. 7.1	Рис. 7.2	Рис. 7.3

Рис. 7.1

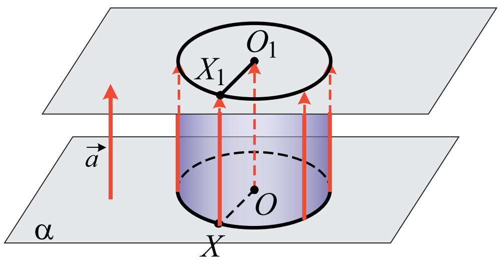


Рис. 7.2

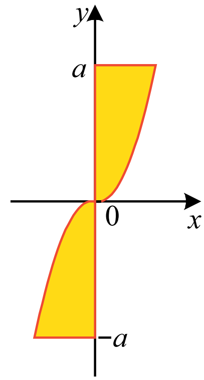
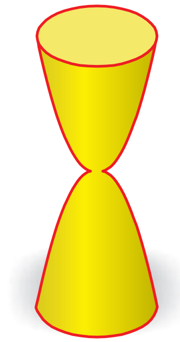


Рис. 7.3



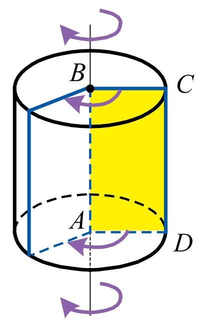
Например, если вращать фигуру, ограниченную осью ординат, прямыми $y = a$ и $y = -a$, графиком функции $y = x^3$ (рис. 7.2), вокруг оси ординат, то получим тело, форма которого напоминает песочные часы (рис. 7.3).

Любое тело вращения имеет ось симметрии. Ею является ось вращения.

Цилиндр можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения прямоугольника вокруг прямой, содержащей одну из его сторон.

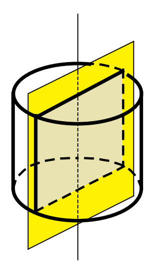
На рисунке 7.4 изображён цилиндр, полученный вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB. При вращении стороны CD образуется боковая поверхность цилиндра, а при вращении сторон BC и AD — основания цилиндра.

Рис. 7.4



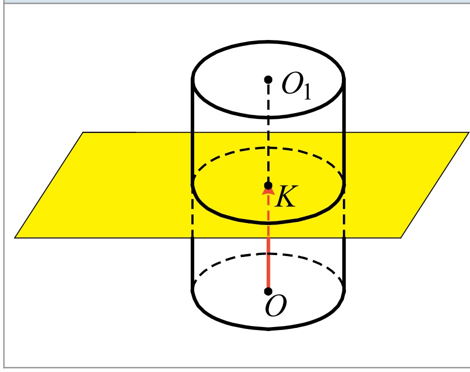
Если пересечь цилиндр плоскостью, проходящей через его ось, то в сечении образуется прямоугольник, две стороны которого — диаметры оснований цилиндра, а две другие — образующие цилиндра (рис. 7.5). Такое сечение называют **осевым сечением цилиндра**. Плоскость, содержащая осевое сечение цилиндра, является его плоскостью симметрии.

Рис. 7.5



Пересечём цилиндр плоскостью, параллельной основаниям цилиндра. Пусть эта плоскость пересекает ось OO_1 цилиндра в точке K (рис. 7.6). Образовавшаяся в сечении фигура — это образ основания цилиндра при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OK}$. Следовательно, сечением цилиндра плоскостью, параллельной основаниям (или перпендикулярной оси цилиндра), является круг, равный основанию.

Рис. 7.6



Представим себе, что поверхность цилиндра разрезали по окружностям оснований и некоторой образующей (рис. 7.7), а затем развернули на плоскости. Полученную фигуру называют **развёрткой цилиндра на плоскость** или просто — **развёрткой**. Она состоит из двух кругов, равных основаниям цилиндра, и прямоугольника, который называют развёрткой боковой поверхности цилиндра (рис. 7.8).

Рис. 7.7

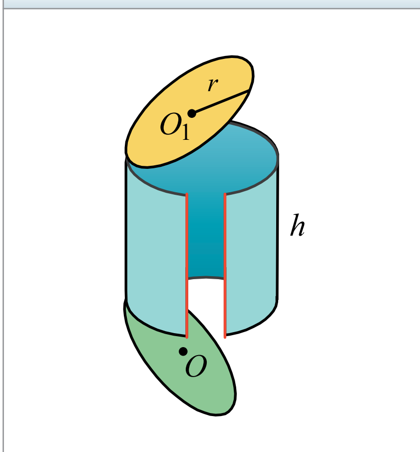
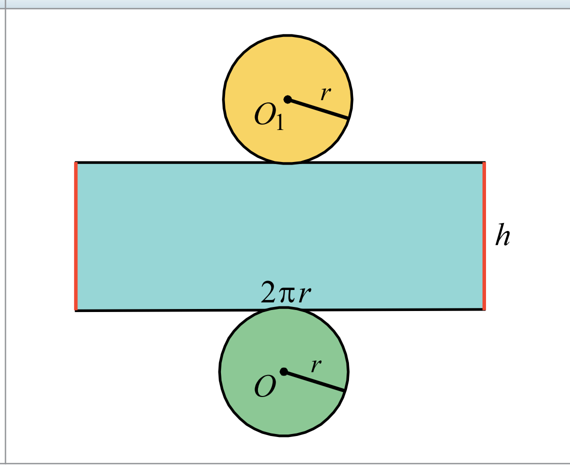


Рис. 7.8



Если образующая цилиндра равна h, а радиус цилиндра — r, то стороны развёртки боковой поверхности цилиндра равны h и $2\pi r$.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимают площадь его развёртки боковой поверхности. Следовательно,

$$\boxed{S_{\text{бок}} = 2\pi rh,}$$

где $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности цилиндра, r — радиус основания цилиндра, h — длина образующей (высоты) цилиндра.

Площадью полной поверхности цилиндра называют сумму площадей боковой поверхности цилиндра и двух оснований. Имеем:

$$\boxed{S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}},}$$

где $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности цилиндра, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания цилиндра.

Площадь основания цилиндра равна πr^2. Тогда получаем формулу

$$\boxed{S_{\text{полн}} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

1. Опишите, что такое цилиндрическая поверхность.
2. Опишите, какой отрезок называют образующей цилиндрической поверхности.
3. Какое тело называют цилиндром?
4. Опишите, что называют боковой поверхностью цилиндра.
5. Что называют основаниями цилиндра?
6. Что называют осью цилиндра?
7. Что называют радиусом цилиндра?
8. Что называют высотой цилиндра?
9. Какое тело называют телом вращения?
10. Какую прямую называют осью вращения?
11. Что называют осевым сечением цилиндра?
12. Что является сечением цилиндра плоскостью, параллельной основанию?
13. Как получают развёртку цилиндра?
14. Из чего состоит развёртка цилиндра?
15. Что принимают за площадь боковой поверхности цилиндра?
16. По какой формуле вычисляют площадь боковой поверхности цилиндра?
17. Что называют площадью полной поверхности цилиндра?
18. По какой формуле вычисляют площадь полной поверхности цилиндра?

Упражнения

7.1. Высота цилиндра равна 8 см, а радиус основания — 7 см. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

7.2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 156 $см^2$. Найдите высоту цилиндра, если радиус его основания равен 6 см.

7.3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и образует с плоскостью основания цилиндра угол 30°. Найдите высоту цилиндра и площадь его основания.

7.4. Высота цилиндра равна 6 см, а угол между диагональю осевого сечения и образующей равен 60°. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра и площадь его основания.

7.5. Квадрат со стороной 6 см вращается вокруг одной из сторон. Найдите: 1) площадь осевого сечения образовавшегося цилиндра; 2) длину окружности основания образовавшегося цилиндра.

7.6. Радиус основания цилиндра равен 4 см, а его высота — 3 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

7.7. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

7.8. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 10 см, а угол между диагоналями осевого сечения, лежащий против диаметра основания, — 120°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

7.9. Высота цилиндра равна 5 см. На расстоянии 4 см от его оси проведено сечение, перпендикулярное основаниям цилиндра. Найдите радиус основания, если диагональ сечения равна 13 см.

7.10. Параллельно оси цилиндра, радиус основания которого равен 8 см, а образующая — 12 см, проведено сечение. Диагональ сечения равна 20 см. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

7.11. Осевое сечение цилиндра — квадрат со стороной $2\sqrt{5}$ см. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого равна 5 см. Найдите площадь этого сечения.

7.12. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $5\sqrt{2}$ см. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, являющееся квадратом с площадью 10 $см^2$. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

7.13. Через образующую цилиндра проведены осевое сечение и сечение, плоскость которого образует с плоскостью осевого сечения угол 30°. Найдите площадь осевого сечения, если площадь второго сечения равна Q.

7.14. Через образующую цилиндра проведены два сечения, площади которых равны 8 $см^2$ и 15 $см^2$. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если плоскости проведённых сечений перпендикулярны.

7.15. Через образующую цилиндра проведены два сечения, площади которых равны 30 см^2 и $20\sqrt{3}$ см^2. Угол между плоскостями сечений равен 30°. Найдите площадь сечения цилиндра, проходящего через две другие стороны данных сечений.

7.16. В нижнем основании цилиндра проведена хорда на расстоянии d от центра этого основания, которая видна из центра верхнего основания под углом α. Длина отрезка, соединяющего центр верхнего основания с серединой этой хорды, равна m. Найдите радиус основания цилиндра.

7.17. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого равна d. Сечение пересекает основание цилиндра по хорде, которую видно из центра этого основания под углом α. Найдите расстояние от плоскости сечения до оси цилиндра, если диагональ сечения образует с плоскостью основания угол β.

7.18. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого равна d и которое пересекает нижнее основание по хорде, которая видна из его центра под углом α. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой этой хорды, образует с плоскостью основания угол γ. Найдите площадь проведённого сечения.

7.19. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, которое находится на расстоянии d от оси цилиндра и отсекает от нижнего основания цилиндра хорду, которую видно из центра верхнего основания под углом α. Найдите площадь проведённого сечения.

7.20. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу в 30°. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность цилиндра?

7.21. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу в 90°. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность цилиндра?

7.22. Осевое сечение цилиндра имеет площадь S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

7.23. Радиус основания цилиндра в 4 раза меньше его высоты, а площадь боковой поверхности цилиндра равна 288π см^2. Найдите высоту цилиндра и радиус его основания.

7.24. Площадь боковой поверхности цилиндра в 2 раза больше площади его основания, а площадь полной поверхности цилиндра равна 256π см^2. Найдите радиус основания цилиндра и его высоту.

7.25. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, которое является квадратом со стороной $4\sqrt{2}$ см и отсекает от окружности основания дугу в 60°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

7.26. Радиус основания цилиндра равен 6 см. Параллельно его оси проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу в 90°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ данного сечения равна 12 см.

7.27. Прямоугольник $ABCD$ является развёрткой боковой поверхности цилиндра, $AC = 8$ см, $\angle ACD = 30°$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если меньшая сторона прямоугольника $ABCD$ является высотой цилиндра.

7.28. Прямоугольник $ABCD$ является развёрткой боковой поверхности цилиндра. Диагональ прямоугольника равна 10 см, а угол между диагоналями — 60°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если большая сторона прямоугольника $ABCD$ является высотой цилиндра.

7.29. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу, градусная мера которой равна 120°. Площадь сечения равна $16\sqrt{3}$ см^2, а диагональ сечения образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

7.30. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно 3 см.

7.31. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которая видна из центра этого основания под углом β. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой этой хорды, равен m и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

7.32. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого образует с плоскостью основания угол α. Это сечение пересекает нижнее основание по хорде, которую видно из центра этого основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус его основания равен R.

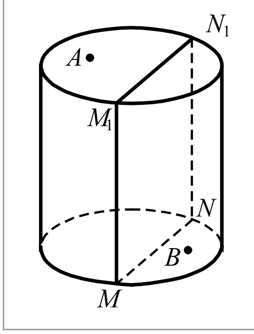
7.33. Высота и радиус основания цилиндра соответственно равны 5 см и 10 см. Концы отрезка длиной 13 см лежат на окружностях разных оснований цилиндра. Найдите расстояние от оси цилиндра до прямой, содержащей этот отрезок.

7.34. Радиус основания и высота цилиндра равны соответственно 8 см и 16 см. Через две точки, лежащие на окружностях разных оснований цилиндра, проведена прямая, которая находится на расстоянии 6 см от оси цилиндра. Найдите угол, который образует эта прямая с осью цилиндра.

7.35. Развёрткой боковой поверхности цилиндра является квадрат. Найдите угол между прямыми, на которых лежат диагонали осевого сечения цилиндра.

7.36. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, площадь которого равна S, а диагональ сечения образует с плоскостью основания угол α. Сечение пересекает нижнее основание цилиндра по хорде, которая видна из центра этого основания под углом β. Найдите высоту и радиус основания цилиндра.

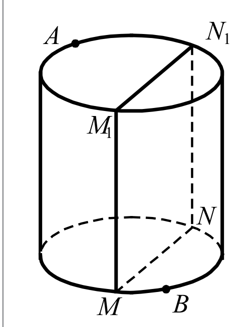
Рис. 7.9



7.37. Прямоугольник MM_1N_1N – сечение цилиндра, параллельное его оси (рис. 7.9). Точки A и B лежат на основаниях цилиндра по разные стороны от данного сечения. Перерисуйте рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью MM_1N_1.

7.38. Прямоугольник MM_1N_1N – сечение цилиндра, параллельное его оси. На окружностях оснований цилиндра по разные стороны от данного сечения выбраны точки A и B (рис. 7.10). Перерисуйте рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью MM_1N_1.

Рис. 7.10



7.39. Отрезок, концы которого лежат на окружностях разных оснований цилиндра, образует с плоскостью основания угол 60° и удалён от оси цилиндра на 15 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна $16\sqrt{3}$ см.

7.40. Точки A и B лежат на окружностях разных оснований цилиндра, а длина отрезка AB равна 13 см. Найдите расстояние от оси цилиндра до прямой AB, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 100π см^2, а радиус его основания – 10 см.

Упражнения для повторения

7.41. Одна из диагоналей трапеции и её основания равны соответственно 40 см, 18 см и 30 см. Найдите отрезки, на которые точка пересечения диагоналей делит данную диагональ.

7.42. Площадь прямоугольной трапеции равна $32\sqrt{3}$ см^2, а острый угол – 60°. Найдите большую боковую сторону трапеции, если известно, что в неё можно вписать окружность.

7.43. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведён перпендикуляр MA к плоскости прямоугольника. Угол между прямой MC и плоскостью прямоугольника равен 30°, $AD = \sqrt{2}$ см, $CD = 2$ см. Найдите угол между плоскостями ABC и MDC.

7.44. Основание пирамиды – квадрат со стороной 9 см, а две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если среднее по длине боковое ребро равно 15 см.

§ 8. Комбинации цилиндра с призмой

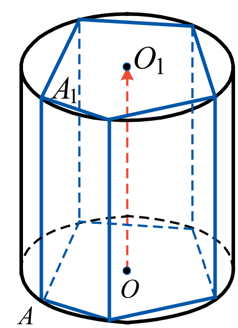
Определение

Призму называют вписанной в цилиндр, если её основания вписаны в основания цилиндра (рис. 8.1)**. При этом цилиндр называют описанным около призмы.**

Докажем, что боковые рёбра призмы, вписанной в цилиндр, являются образующими цилиндра.

Пусть отрезок AA_1 – боковое ребро призмы, а точки O и O_1 – центры описанных окружностей оснований призмы. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ образом нижнего основания призмы является верхнее основание, а следовательно, образом точки O является точка O_1, т. е. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OO_1}$. Прямая OO_1 – ось цилиндра. Следовательно, отрезок AA_1 перпендикулярен основаниям цилиндра. Поскольку точки A и A_1 принадлежат основаниям цилиндра, то отрезок AA_1 – образующая цилиндра.

Рис. 8.1



Теперь можно сделать такой вывод: если призма вписана в цилиндр, то она является прямой. Другими словами, наклонную призму вписать в цилиндр нельзя.

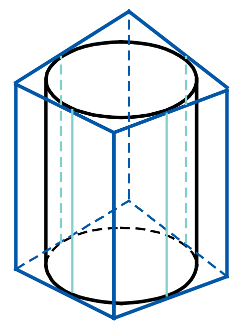
Вписать в цилиндр можно прямую призму, вокруг основания которой можно описать окружность.

Так, правильную призму и любую прямую треугольную призму можно вписать в цилиндр.

Определение

Призму называют описанной около цилиндра, если её основания описаны около оснований цилиндра (рис. 8.2)**. При этом цилиндр называют вписанным в призму.**

Рис. 8.2



Боковая грань призмы, описанной около цилиндра, проходит через образующую цилиндра и других общих точек с цилиндром не имеет (на рисунке 8.2 эти образующие выделены голубым цветом). В этом случае говорят, что боковая грань призмы **касается цилиндра**.

Воспользовавшись ранее изложенной идеей, докажите самостоятельно, что если призма описана около цилиндра, то она является прямой.

Описать около цилиндра можно прямую призму, в основание которой можно вписать окружность.

Так, правильную призму и любую прямую треугольную призму можно описать около цилиндра.

1. Какую призму называют вписанной в цилиндр?
2. Чем для цилиндра являются боковые рёбра призмы, вписанной в цилиндр?
3. Какую призму можно вписать в цилиндр?
4. Какую призму называют описанной около цилиндра?
5. В каком случае говорят, что боковая грань призмы касается цилиндра?
6. Какую призму можно описать около цилиндра?

Упражнения

8.1. Можно ли описать цилиндр около прямой призмы, основанием которой является прямоугольник?

8.2. Можно ли описать цилиндр около прямой призмы, основанием которой является ромб, отличный от квадрата?

8.3. Определите вид треугольника, являющегося основанием призмы, вписанной в цилиндр, если ось цилиндра проходит вне призмы.

8.4. Определите вид треугольника, являющегося основанием призмы, вписанной в цилиндр, если ось цилиндра проходит внутри призмы.

8.5. Можно ли вписать цилиндр в призму, основанием которой является ромб?

8.6. Можно ли вписать цилиндр в призму, основанием которой является прямоугольник, отличный от квадрата?

8.7. Основанием прямой призмы является четырёхугольник $ABCD$, у которого $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 123^\circ$, $\angle C = 144^\circ$, $\angle D = 57^\circ$. Можно ли описать цилиндр около этой призмы?

8.8. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция, боковая сторона которой равна меньшему основанию, а острый угол равен 60°. Можно ли вписать цилиндр в эту призму?

8.9. Сумма боковых сторон трапеции, являющейся основанием прямой призмы, равна 16 см, а средняя линия трапеции — 7 см. Можно ли вписать цилиндр в эту призму?

8.10. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна a, а высота призмы — h. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, описанного около призмы.

8.11. Основанием прямой призмы является равнобедренный прямоугольный треугольник. Высота призмы равна 10 см, а площадь боковой поверхности — 40 см^2. Найдите радиус основания цилиндра, описанного около этой призмы.

8.12. Около правильной треугольной призмы описан цилиндр, радиус основания которого r, а угол между диагональю осевого сечения и образующей равен β. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

8.13. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при вершине. Диагональ боковой грани призмы, содержащей основание равнобедренного треугольника, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около призмы.

8.14. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с углом α при основании. Диагональ боковой грани призмы, содержащей боковую сторону основания, равна l и наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около призмы.

8.15. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, а высота — h. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около этой призмы.

8.16. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

8.17. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, а высота призмы – h. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, вписанного в эту призму.

8.18. Основанием прямой призмы является ромб. Площадь боковой поверхности призмы равна 120 см^2. Найдите радиус основания цилиндра, вписанного в эту призму, если высота призмы равна 6 см, а острый угол основания – 60°.

8.19. В правильную четырёхугольную призму вписан цилиндр, радиус основания которого равен R, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

8.20. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а около него описана правильная шестиугольная призма. Найдите отношение площадей боковых поверхностей этих призм.

8.21. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма, а около него описана правильная четырёхугольная призма. Найдите отношение площадей боковых поверхностей этих призм.

8.22. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 8 см, а боковое ребро – 4 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму.

8.23. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4 см, а боковое ребро – 3 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму.

8.24. В правильной треугольной призме боковое ребро равно a, а диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхность цилиндра, вписанного в эту призму.

8.25. Диагональ основания правильной четырёхугольной призмы равна d, а диагональ призмы образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму.

8.26. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с углом α при основании. Диагональ грани, содержащей основание этого треугольника, образует с плоскостью основания призмы угол β. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если радиус основания цилиндра, описанного около призмы, равен r.

8.27. В правильную треугольную призму вписан цилиндр, высота которого равна h, а радиус основания – r. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей через две его образующие, по которым боковая поверхность цилиндра касается боковой поверхности призмы.

8.28. В правильной четырёхугольной призме сторона основания равна a, а высота — H. В призму вписан цилиндр. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей через две его образующие, по которым боковая поверхность цилиндра касается двух соседних боковых граней призмы.

8.29. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, содержащей боковую сторону этого треугольника, образует с плоскостью основания призмы угол α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если радиус основания цилиндра, вписанного в эту призму, равен r.

Упражнения для повторения

8.30. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке K, $BM = 4$ см, $AC = 8$ см, $AM = MK$. Найдите AB.

8.31. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна d и образует с плоскостью боковой грани угол $30°$. Найдите объём призмы.

8.32. Найдите длину медианы треугольника ABC, проведённой к стороне BC, если A (10; –11; 9), B (2; –7; 6), C (6; –3; –2).

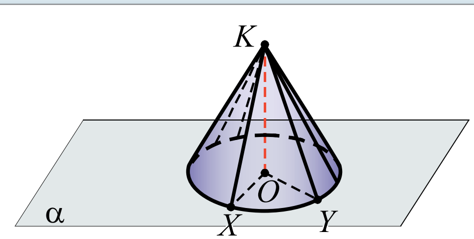
§ 9. Конус

Рассмотрим на плоскости α окружность с центром в точке O. Проведём отрезок OK перпендикулярно плоскости α (рис. 9.1). Соединим точку K со всеми точками окружности. Все проведённые отрезки равны и образуют равные углы с плоскостью α. Эти отрезки образуют **коническую поверхность**. Каждый из этих отрезков называют **образующей конической поверхности**.

Окружность с центром O ограничивает круг. Тело, ограниченное этим кругом и конической поверхностью, называют **конусом**.

Коническую поверхность называют **боковой поверхностью конуса**, круг — **основанием конуса**, образующие цилиндрической поверхности — **образующими конуса**. На рисунке 9.1 отрезки KX и KY — образующие конуса. Все образующие конуса равны и образуют равные углы с плоскостью основания.

Рис. 9.1



Конец образующей, не принадлежащий плоскости основания, называют **вершиной конуса**. На рисунке 9.1 точка K – вершина конуса.

Прямую, проходящую через вершину конуса и центр его основания, называют **осью конуса**. На рисунке 9.1 прямая KO – ось конуса. Ось конуса перпендикулярна плоскости его основания.

На рисунке 9.1 каждый из отрезков OX и OY является радиусом основания конуса.

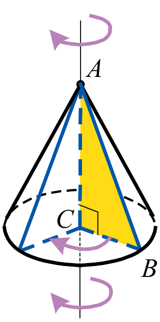
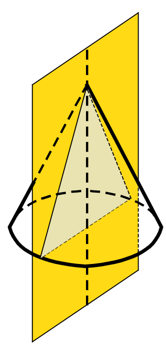
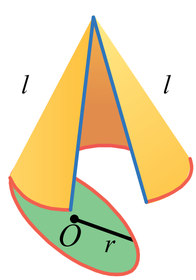
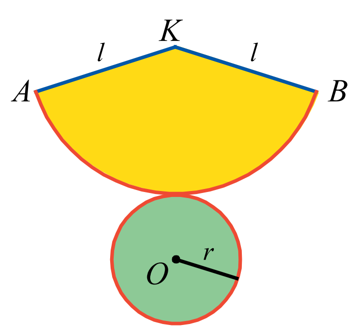
Высотой конуса называют отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания. На рисунке 9.1 отрезок KO – высота конуса.

Конус можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей один из его катетов. На рисунке 9.2 изображён конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг прямой AC. При вращении гипотенуза AB образует боковую поверхность конуса, катет CB – основание конуса.

Если пересечь конус плоскостью, проходящей через его ось, то в сечении образуется равнобедренный треугольник, боковые стороны которого – образующие конуса, основание – диаметр основания конуса (рис. 9.3). Такое сечение называют **осевым сечением конуса**.

Плоскость, содержащая осевое сечение конуса, является его плоскостью симметрии.

Представим себе, что поверхность конуса разрезали по окружности основания и некоторой образующей (рис. 9.4), а затем развернули на плоскости. Полученную фигуру называют **развёрткой конуса на плоскость** или просто – **развёрткой** (рис. 9.5). Она состоит из круга, равного основанию конуса, и кругового сектора, который называют **развёрткой боковой поверхности конуса**.

Рис. 9.2	**Рис. 9.3**	**Рис. 9.4**	**Рис. 9.5**
			

Если образующая конуса равна l, а радиус основания конуса — r, то радиус кругового сектора равен l, а длина дуги сектора — $2\pi r$. Пусть $\angle AKB = \alpha$. Тогда длина дуги AB равна $\frac{\pi l}{180}\alpha$. Имеем: $2\pi r = \frac{\pi l}{180}\alpha$. Отсюда

$$\alpha = \frac{360r}{l}. \qquad (*)$$

За площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности конуса принимают площадь его развёртки боковой поверхности. Имеем: $S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha$. С учётом равенства (*) получаем: $S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \frac{360r}{l} = \pi rl$.

Итак, площадь боковой поверхности конуса вычисляют по формуле

$$\boxed{S_{\text{бок}} = \pi rl,}$$

где r — радиус основания конуса, l — длина образующей конуса.

Площадью полной поверхности конуса называют сумму площадей боковой поверхности и основания конуса. Имеем:

$$\boxed{S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}},}$$

где $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности конуса, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания конуса.

Площадь основания конуса равна πr^2. Тогда получаем формулу

$$\boxed{S_{\text{полн}} = \pi rl + \pi r^2}$$

1. Опишите, что такое коническая поверхность.
2. Опишите, какой отрезок называют образующей конической поверхности.
3. Какое тело называют конусом?
4. Опишите, что называют боковой поверхностью конуса.
5. Что называют основанием конуса?
6. Что называют осью конуса?
7. Что называют радиусом конуса?
8. Что называют высотой конуса?
9. Что называют осевым сечением конуса?
10. Как получают развёртку конуса?
11. Из чего состоит развёртка конуса?
12. Что принимают за площадь боковой поверхности конуса?

13. По какой формуле вычисляют площадь боковой поверхности конуса?
14. Что называют площадью полной поверхности конуса?
15. По какой формуле вычисляют площадь полной поверхности конуса?

Упражнения

9.1. Высота конуса равна 9 см, а его образующая — 11 см. Найдите радиус основания конуса.

9.2. Радиус основания конуса равен 5 см, а образующая — 11 см. Найдите высоту конуса.

9.3. Найдите высоту и радиус основания конуса, если его образующая равна 12 см, а осевое сечение конуса — правильный треугольник.

9.4. Радиус основания конуса равен 6 см, а его осевое сечение — равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите высоту конуса и его образующую.

9.5. Высота конуса равна 12 см, а разность образующей и радиуса основания равна 8 см. Найдите площадь осевого сечения конуса.

9.6. Радиус основания конуса равен 8 см, а его образующая больше высоты на 2 см. Найдите площадь осевого сечения конуса.

9.7. Высота конуса равна 18 см, а радиус основания — 6 см. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает его боковую поверхность по окружности, радиус которой 4 см. Найдите расстояние от плоскости сечения до плоскости основания конуса.

9.8. Радиус основания конуса равен 10 см, а образующая — 26 см. На расстоянии 4,8 см от вершины конуса проведено сечение, плоскость которого параллельна плоскости основания. Найдите площадь этого сечения.

9.9. Радиус основания конуса равен 4 см, а его образующая — 5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

9.10. Радиус основания конуса равен 5 см, а его высота — 12 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

9.11. Осевое сечение конуса — равнобедренный прямоугольный треугольник, высота которого, проведённая к основанию, равна 10 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9.12. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник с основанием 8 см и углом при вершине 120°. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9.13. Высота конуса равна h, а угол при вершине осевого сечения равен 2α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9.14. Образующая конуса равна a и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9.15. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен α, а площадь осевого сечения равна Q. Найдите площадь основания конуса.

9.16. Через вершину конуса проведено сечение, пересекающее его основание по хорде длиной 12 см. Эта хорда видна из центра основания под углом 60°. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса, если площадь сечения равна 72 см^2.

9.17. Радиус основания конуса равен 16 см. Через вершину конуса проведено сечение, пересекающее его основание по хорде, которую видно из центра основания под углом 60°. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса, если высота конуса равна 24 см.

9.18. В основании конуса проведена хорда длиной m, которая видна из центра основания под углом α. Найдите высоту конуса, если угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен β.

9.19. В основании конуса проведена хорда, которую видно из центра основания под углом α, а из вершины конуса — под углом β. Найдите высоту конуса, если его образующая равна l.

9.20. Через две образующие конуса, угол между которыми равен φ, проведено сечение. Найдите площадь этого сечения, если высота конуса равна h, а угол между высотой конуса и его образующей равен α.

9.21. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение. Найдите площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом β.

9.22. Площадь полной поверхности конуса равна 200π см^2, а его образующая — 17 см. Найдите объём конуса.

9.23. Площадь полной поверхности конуса равна 90π см^2, а его образующая больше радиуса основания на 8 см. Найдите объём конуса.

9.24. Площадь боковой поверхности конуса равна 32π см^2, а его высота — $4\sqrt{3}$ см. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

9.25. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, площадь которого равна S. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9.26. Параллельно плоскости основания конуса проведена плоскость, которая делит его на два тела, причём площадь боковой поверхности конуса, который отсечён плоскостью, в три раза меньше площади боковой поверхности всего конуса. В каком отношении, считая от вершины, эта плоскость делит высоту конуса?

9.27. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен α, а площадь осевого сечения конуса равна S. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9.28. Развёртка боковой поверхности конуса — сектор, угол которого равен 120°. Найдите площадь полной поверхности конуса, если периметр его осевого сечения равен 24 см.

9.29. Развёртка боковой поверхности конуса — сектор, угол которого равен 210°. Найдите площадь полной поверхности конуса, если площадь его осевого сечения равна 64 см^2.

9.30. Образующая конуса в 2 раза больше радиуса его основания. Докажите, что развёртка боковой поверхности конуса является полукругом.

9.31. В основании конуса проведена хорда длиной a, которую видно из центра основания под углом α, а из вершины конуса — под углом φ. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9.32. Радиус основания конуса равен R. В основании конуса проведена хорда, которую видно из центра основания под углом α, а из вершины конуса — под углом β. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9.33. В основании конуса проведена хорда AB на расстоянии 3 см от центра O основания, отрезок MO — высота конуса, $MO = 6\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние от точки O до плоскости AMB.

9.34. В основании конуса проведена хорда CD на расстоянии 9 см от центра O основания, отрезок SO — высота конуса. Найдите высоту конуса, если точка O удалена от плоскости CDS на 4,5 см.

9.35. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, которое образует с плоскостью основания конуса угол β. Найдите площадь полной поверхности конуса, если его высота равна p.

9.36. Сечение конуса, проходящее через его вершину, пересекает основание конуса по хорде, которую видно из центра основания под углом β. Плоскость сечения образует с высотой конуса угол φ. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его высота равна H.

9.37. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, площадь которого равна Q и которое образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Упражнения для повторения

9.38. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F, $AB : BF = 3 : 7$, AD — большее основание трапеции. Найдите основания трапеции, если их разность равна 6 см.

9.39. Одна из сторон треугольника равна 25 см, а другая сторона делится точкой касания вписанной окружности на отрезки длиной 22 см и 8 см, считая от конца первой стороны. Найдите радиус вписанной окружности.

9.40. В прямоугольном параллелепипеде диагональ равна d и образует с плоскостью основания угол α, а с плоскостью одной из боковых граней — угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

§ 10. Усечённый конус

Пересечём конус плоскостью, параллельной плоскости основания. В силу ключевой задачи 4.24 полученная фигура — это образ основания конуса при гомотетии с центром в вершине конуса. Тогда сечением конуса плоскостью, параллельной основанию (или перпендикулярной оси конуса), является круг.

Секущая плоскость, параллельная основанию конуса, делит конус на два тела. Одно из них является конусом, другое называют **усечённым конусом** (рис. 10.1).

Рис. 10.1

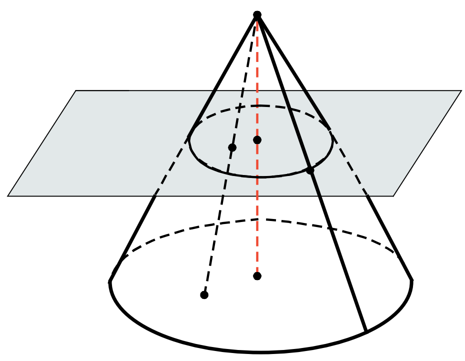


Рис. 10.2

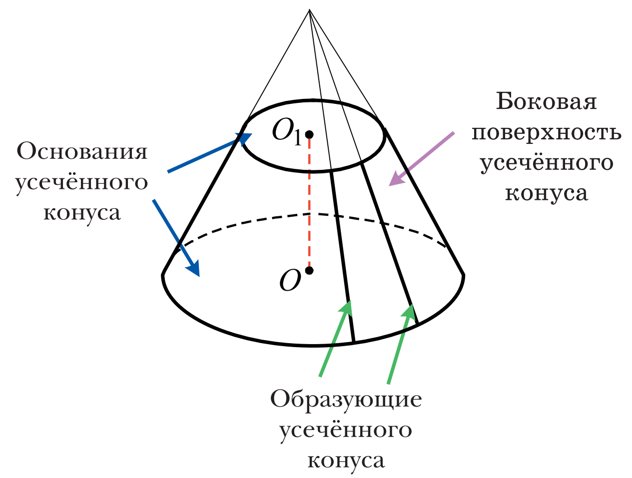
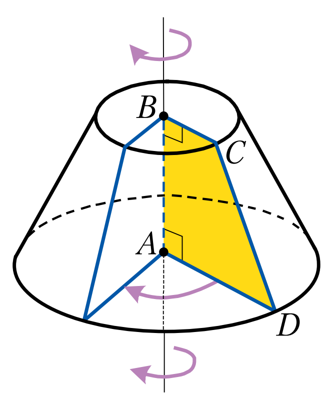


Рис. 10.3

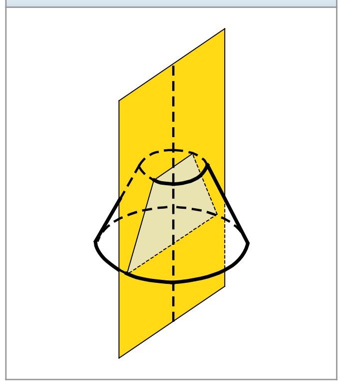


Основание данного конуса, из которого образован усечённый конус, и круг, получившийся в сечении, называют **основаниями усечённого конуса**. Часть боковой поверхности данного конуса и часть его образующей, заключённые между основаниями усечённого конуса, называют соответственно **боковой поверхностью** и **образующей усечённого конуса** (рис. 10.2). Прямую, проходящую через центры O и O_1 оснований, называют **осью усечённого конуса**.

Высотой усечённого конуса называют перпендикуляр, проведённый из любой точки одного основания на плоскость другого основания. На рисунке 10.2 отрезок OO_1 является высотой усечённого конуса.

Усечённый конус можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения прямоугольной трапеции вокруг прямой, содержащей меньшую боковую сторону. На рисунке 10.3 изображён усечённый конус, полученный вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг прямой AB, содержащей меньшую боковую сторону. При вращении боковая сторона CD трапеции образует боковую поверхность усечённого конуса, а основания AD и BC трапеции – основания усечённого конуса.

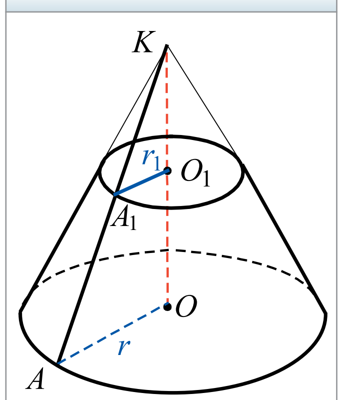
Рис. 10.4



Если пересечь усечённый конус плоскостью, проходящей через его ось, то в сечении образуется равнобокая трапеция, боковые стороны которой – образующие усечённого конуса, основания – диаметры оснований усечённого конуса (рис. 10.4). Такое сечение называют **осевым сечением усечённого конуса**.

Плоскость, содержащая осевое сечение усечённого конуса, является его плоскостью симметрии.

Рис. 10.5



На рисунке 10.5 изображены: конус с вершиной в точке K, образующей KA и основанием с центром в точке O и радиусом r («большой» конус); конус с вершиной в точке K, образующей KA_1 и основанием с центром в точке O_1 и радиусом r_1 («малый» конус); усечённый конус с образующей AA_1 и основаниями с центрами в точках O и O_1.

За площадь $S_{бок}$ боковой поверхности усечённого конуса принимают разность площадей боковых поверхностей «большого» и «малого» конусов. Имеем:

$S_{бок} = \pi r \cdot KA - \pi r_1 \cdot KA_1 = \pi r(KA_1 + AA_1) - \pi r_1 KA_1 = \pi r \cdot AA_1 + \pi(r - r_1)KA_1$.

Треугольники A_1O_1K и AOK — прямоугольные с общим острым углом AKO. Следовательно, эти треугольники подобны. Отсюда

$\frac{KA}{KA_1} = \frac{OA}{OA_1}$, т. е. $\frac{KA}{KA_1} = \frac{r}{r_1}$. Имеем:

$$\frac{KA}{KA_1} - 1 = \frac{r}{r_1} - 1; \ \frac{KA - KA_1}{KA_1} = \frac{r - r_1}{r_1}; \ \frac{AA_1}{KA_1} = \frac{r - r_1}{r_1}; \ KA_1 = \frac{r_1 \cdot AA_1}{r - r_1}.$$

Тогда $S_{бок} = \pi r \cdot AA_1 + \pi\,(r - r_1) \cdot \frac{r_1 \cdot AA_1}{r - r_1} = \pi r \cdot AA_1 + \pi r_1 \cdot AA_1 = \pi\,(r + r_1) \cdot AA_1$.

Итак, площадь боковой поверхности усечённого конуса вычисляют по формуле

$$\boxed{S_{бок} = \pi(r + r_1)l,}$$

где r и r_1 — радиусы оснований, l — длина образующей.

1. Опишите, какое тело называют усечённым конусом.
2. Опишите, что называют основанием усечённого конуса.
3. Что называют боковой поверхностью усечённого конуса?
4. Что называют образующей усечённого конуса?
5. Что называют осью усечённого конуса?
6. Что называют высотой усечённого конуса?
7. Что называют осевым сечением усечённого конуса?
8. Что принимают за площадь боковой поверхности усечённого конуса?
9. По какой формуле вычисляют площадь боковой поверхности усечённого конуса?

Упражнения

10.1. Высота усечённого конуса равна 10 см, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен 30°. Найдите образующую усечённого конуса.

10.2. Радиусы оснований усечённого конуса равны 8 см и 4 см, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен 60°. Найдите высоту усечённого конуса и его образующую.

10.3. Образующая усечённого конуса равна 15 см, высота — 12 см, радиус одного из оснований — 6 см. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса.

10.4. Радиусы оснований усечённого конуса равны 14 см и 22 см, а образующая — 17 см. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса.

10.5. Радиусы оснований усечённого конуса равны 8 см и 9 см, а его образующая — 5 см. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

10.6. Радиусы оснований усечённого конуса относятся как 9 : 5. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса, если его высота равна 15 см, а образующая — 17 см.

10.7. Радиусы оснований усечённого конуса равны 9 см и 21 см, а его образующая относится к высоте конуса как 13 : 5. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса.

10.8. Площади оснований усечённого конуса равны 9 см^2 и 25 см^2. Через середину его высоты проведено сечение, параллельное основаниям. Найдите площадь этого сечения.

10.9. Площади оснований усечённого конуса равны 12 см^2 и 24 см^2. Через точку, которая делит его высоту в отношении 1 : 3, считая от меньшего основания, проведено сечение, параллельное основаниям. Найдите площадь этого сечения.

10.10. Радиусы оснований усечённого конуса равны 8 см и 13 см, а его образующая равна радиусу большего основания. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса.

10.11. Радиусы оснований усечённого конуса равны 10 см и 16 см, а его образующая равна радиусу меньшего из оснований. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса.

10.12. Образующая усечённого конуса равна 6 см и образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если его образующая равна диаметру меньшего основания.

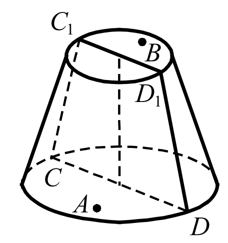
10.13. Найдите радиусы оснований усечённого конуса, образующая которого равна 10 см, высота — 8 см, а площадь боковой поверхности — 100π см^2.

10.14. Высота усечённого конуса равна 6 см, а угол между высотой и образующей усечённого конуса равен 30°. Диагональ осевого сечения усечённого конуса перпендикулярна образующей, лежащей в плоскости этого осевого сечения. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

10.15. Образующая усечённого конуса равна 10 см и наклонена к плоскости большего основания под углом 60°. Диагональ осевого сечения усечённого конуса образует с плоскостью большего основания угол 30°. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

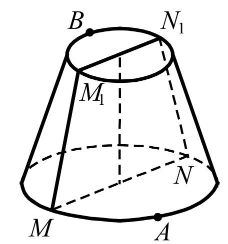
10.16. В усечённом конусе проведено осевое сечение CC_1D_1D и по разные стороны от него на основаниях конуса выбраны точки A и B (рис. 10.6). Перерисуйте рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью CC_1D_1.

Рис. 10.6



10.17. В усечённом конусе проведено осевое сечение MM_1N_1N и по разные стороны от него на окружностях оснований выбраны точки A и B (рис. 10.7). Перерисуйте рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью MM_1N_1.

Рис. 10.7



10.18. Диагонали осевого сечения усечённого конуса перпендикулярны, а его образующая равна m и наклонена к плоскости большего основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

10.19. Высота усечённого конуса равна h, а диагонали его осевого сечения перпендикулярны. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, если его образующая наклонена к плоскости большего основания под углом β.

Упражнения для повторения

10.20. Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой её острого угла и перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции, если её меньшее основание равно a.

10.21. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 12 см и 16 см. Найдите высоту трапеции.

10.22. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью одной боковой грани угол α, а с другой – угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

§ 11. Комбинации конуса с пирамидой

Определение

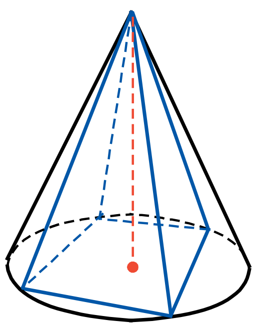
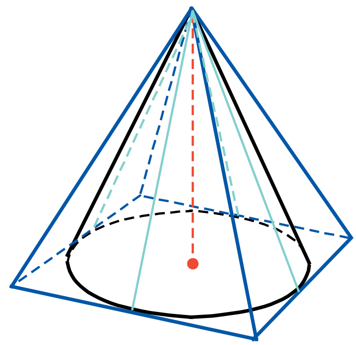
Пирамиду называют вписанной в конус, если её основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 11.1)**. При этом конус называют описанным около пирамиды.**

Рёбра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса, а высоты пирамиды и конуса совпадают.

Пирамиду можно вписать в конус, если вокруг основания этой пирамиды можно описать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр описанной окружности основания.

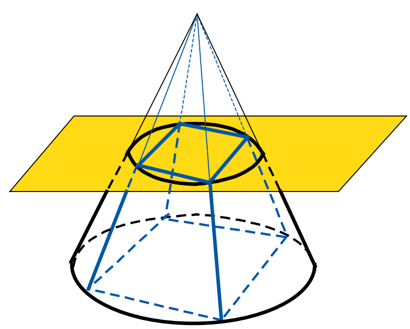
Определение

Пирамиду называют описанной около конуса, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 11.2)**. При этом конус называют вписанным в пирамиду.**

Рис. 11.1	Рис. 11.2
	

Боковая грань пирамиды, описанной около конуса, проходит через образующую конуса и других общих точек с конусом не имеет (на рисунке 11.2 эти образующие выделены голубым цветом). В этом случае говорят, что боковая грань пирамиды **касается** конуса.

Рис. 11.3



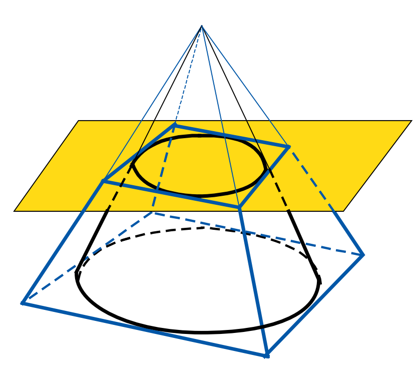
Высота пирамиды, вписанной в конус, и высота конуса совпадают.

Пирамиду можно описать вокруг конуса, если в основание этой пирамиды можно вписать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр вписанной окружности основания.

На рисунке 11.3 изображена пирамида, вписанная в конус, которую пересекли плоскостью, параллельной основанию. В результате образовались две комбинации тел: пирамида, вписанная в конус, и **усечённая пирамида, вписанная в усечённый конус**. При этом усечённый конус называют **описанным около усечённой пирамиды**.

Основания усечённой пирамиды, вписанной в усечённый конус, вписаны в основания усечённого конуса. Боковые рёбра усечённой пирамиды являются образующими усечённого конуса.

Рис. 11.4



На рисунке 11.4 изображена пирамида, описанная около конуса, которую пересекли плоскостью, параллельной основанию. В результате образовались две комбинации тел: пирамида, описанная около конуса, и **усечённая пирамида, описанная около усечённого конуса**. При этом усечённый конус называют **вписанным в усечённую пирамиду**.

Основания усечённой пирамиды, описанной около усечённого конуса, описаны около оснований усечённого конуса. Боковые грани усечённой пирамиды проходят через образующие усечённого конуса и других общих точек с усечённым конусом не имеют.

1. Какую пирамиду называют вписанной в конус?
2. Чем для конуса являются боковые рёбра пирамиды, вписанной в конус?
3. Что можно сказать о высоте конуса и высоте пирамиды, вписанной в данный конус?
4. Какую пирамиду можно вписать в конус?
5. Какую пирамиду называют описанной около конуса?
6. В каком случае говорят, что боковая грань пирамиды касается конуса?
7. Что можно сказать о высоте конуса и высоте пирамиды, описанной около данного конуса?
8. Какую пирамиду можно описать около конуса?
9. Опишите, что называют усечённой пирамидой, вписанной в усечённый конус.
10. Чем для усечённого конуса являются боковые рёбра усечённой пирамиды, вписанной в усечённый конус?
11. Опишите, что называют усечённой пирамидой, описанной около усечённого конуса.

Упражнения

11.1. Основанием пирамиды является прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Все боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания углы по 30°. Найдите площадь осевого сечения конуса, описанного около пирамиды.

11.2. Основанием пирамиды является прямоугольник, одна из сторон которого равна 18 см и образует с диагональю угол 60°. Все боковые рёбра пирамиды равны 12 см. Найдите площадь осевого сечения конуса, описанного около пирамиды.

11.3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а боковое ребро — 4 см. Найдите площадь полной поверхности конуса, описанного около этой пирамиды.

11.4. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 4 см, а высота — $2\sqrt{7}$ см. Найдите площадь полной поверхности конуса, описанного около этой пирамиды.

11.5. Боковые рёбра пирамиды равны b, а её основанием является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом β. Найдите площадь полной поверхности конуса, описанного около этой пирамиды.

11.6. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, площадь которого равна Q, а острый угол — α. Боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания угол β. Найдите площадь осевого сечения конуса, описанного около пирамиды.

11.7. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c, а острый угол — β. Двугранные углы при рёбрах основания равны α. Найдите площадь осевого сечения конуса, вписанного в эту пирамиду.

11.8. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с основанием m и углом при основании α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны φ. Найдите площадь полной поверхности конуса, вписанного в эту пирамиду.

11.9. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a, а угол между боковыми сторонами — β. Все двугранные углы при основании пирамиды равны φ. Найдите площадь полной поверхности конуса, вписанного в эту пирамиду.

11.10. Основанием пирамиды является ромб со стороной 16 см и острым углом 60°. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 30°. Найдите объём конуса, вписанного в данную пирамиду.

11.11. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной 20 см и основанием 24 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 45°. Найдите объём конуса, вписанного в данную пирамиду.

11.12. Основания усечённой пирамиды — квадраты, площади которых равны 16 см^2 и 36 см^2, а площадь её боковой поверхности — 40 см^2. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса, вписанного в эту усечённую пирамиду.

11.13. Площадь осевого сечения усечённого конуса, описанного около усечённой четырёхугольной пирамиды, равна $5\sqrt{14}$ см^2. Основания усечённой пирамиды — квадраты со сторонами 4 см и 6 см. Найдите образующую усечённого конуса.

Упражнения для повторения

11.14. В прямоугольном треугольнике MNK ($\angle N = 90°$) $MN = 18$ см, $MK = 30$ см. Найдите радиус окружности, которая проходит через точки N, M и точку пересечения биссектрисы угла M с катетом NK.

11.15. Докажите, что треугольник с вершинами A (2; –3; 1), B (–1; 0; 4) и C (4; 1; 5) является равнобедренным.

11.16. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение AB_1C_1D. Известно, что площади четырёхугольников $ABCD$ и AB_1C_1D равны 12 см^2 и 20 см^2 соответственно. Найдите площадь грани BB_1C_1C.

§ 12. Сфера и шар. Уравнение сферы

Определение

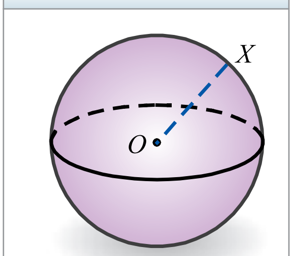
Сферой называют ГМТ пространства, равноудалённых от заданной точки (рис. 12.1)**.**

Заданную точку называют **центром сферы**. На рисунке 12.1 точка O — центр сферы.

Любой отрезок, соединяющий точку сферы с её центром, называют **радиусом сферы**. На рисунке 12.1 отрезок OX — радиус. Из определения следует, что все радиусы одной сферы равны.

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называют **диаметром сферы**. Если радиус сферы равен r, то диаметр равен $2r$.

Рис. 12.1



Из курса математики 6 класса вы знаете, что сфера ограничивает тело, которое называют **шаром**.

Определение

Шаром называют ГМТ пространства, расстояние от которых до заданной точки не более данного положительного числа.

Заданную точку называют **центром шара**, данное число — **радиусом шара**. Сфера, у которой центр совпадает с центром шара, а радиус равен радиусу данного шара, называют **поверхностью шара**. Другими словами, поверхность шара — это сфера, ограничивающая шар.

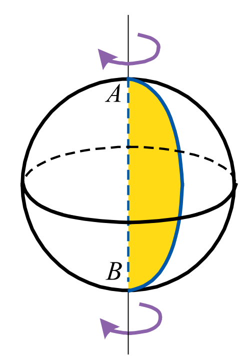
Также принято отрезок, соединяющий центр шара с какой-либо точкой на его поверхности, называть радиусом шара.

Диаметр шара — это диаметр сферы, ограничивающей шар.

Если X — произвольная точка шара радиуса r с центром в точке O, то $OX \le r$.

Шар можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения полукруга вокруг прямой, содержащей его диаметр. На рисунке 12.2 изображён шар, полученный вращением полукруга вокруг прямой, содержащей его диаметр AB. При вращении дуги AB образуется сфера — поверхность полученного шара.

Рис. 12.2



Теорема 12.1

Уравнение

$$\boldsymbol{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,}$$

где $r > 0$, является уравнением сферы с центром в точке A (a; b; c) и радиусом r.

Доказательство

Покажем, что координаты каждой точки данной сферы удовлетворяют данному уравнению, и наоборот, каждая точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, принадлежит данной сфере.

Пусть M (x; y; z) — произвольная точка сферы радиуса r с центром в точке A (a; b; c) (рис. 12.3). Тогда $AM = r$, или

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$. Отсюда

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2, \text{ где } r>0. \qquad (*)$$

Мы показали, что координаты $(x; y; z)$ произвольной точки M сферы являются решением уравнения (*).

Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ – произвольное решение уравнения (*). Имеем:

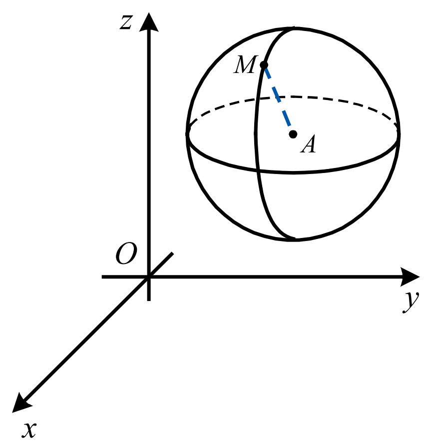
$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2=r^2.$$

Отсюда с учётом того, что $r>0$, получаем: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$.

Это равенство означает, что точка $N(x_0; y_0; z_0)$ удалена от точки $A(a; b; c)$ на расстояние, равное радиусу сферы. Следовательно, точка N принадлежит сфере.

Итак, мы показали, что уравнение (*) является уравнением сферы. ◄

Рис. 12.3



1. Что называют сферой?
2. Какую точку называют центром сферы?
3. Что называют радиусом сферы?
4. Что называют диаметром сферы?
5. Чему равен диаметр сферы, если её радиус равен r?
6. Что называют шаром?
7. Какую сферу называют поверхностью шара?
8. Что называют диаметром шара?
9. Какое уравнение является уравнением сферы с центром в точке $A(a; b; c)$ и радиусом r?

Упражнения

12.1. Радиус шара равен $\sqrt{5}$ см. Принадлежит ли шару точка A, если она удалена: 1) от центра шара на 2 см; 2) от центра шара на 2,3 см; 3) от точки на поверхности шара на 4,5 см?

12.2. Радиус шара равен $4\frac{2}{7}$ см. Принадлежит ли шару точка B, если она удалена: 1) от центра шара на 5 см; 2) от центра шара на $\sqrt{15}$ см; 3) от точки на поверхности шара на 8,6 см?

12.3. Определите по уравнению сферы координаты её центра и радиус:
1) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=9$; 2) $x^2+(y+5)^2+(z-6)^2=25$;

3) $(x+3)^2+(y-4)^2+z^2=11$; 4) $x^2+y^2+z^2=5$.

12.4. Определите по уравнению сферы координаты её центра и радиус:
1) $(x+6)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=16$; 2) $(x-9)^2+y^2+(z+8)^2=7$.

12.5. Как по отношению к сфере $(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=100$ расположена точка:
1) $A\ (-6;\ 9;\ -4\sqrt{3})$; 2) $B\ (5;\ 8;\ -5)$; 3) $C\ (-10;\ -4;\ 1)$?

12.6. Составьте уравнение сферы, если известны координаты её центра K и радиус r:
1) $K\ (2;\ 5;\ -12)$, $r=2$; 3) $K\ (0;\ 5;\ 11)$, $r=2\sqrt{5}$.
2) $K\ (-4;\ 0;\ 7)$, $r=1$;

12.7. Составьте уравнение сферы, если известны координаты её центра K и радиус r:
1) $M\ (-3;\ 1;\ -8)$, $r=9$; 3) $M\ (9;\ -10;\ 0)$, $r=4\sqrt{2}$.

12.8. Составьте уравнение сферы с центром в точке $P\ (3;\ -1;\ 16)$, которая проходит через точку $M\ (-2;\ -4;\ 13)$.

12.9. Составьте уравнение сферы, диаметром которой является отрезок CD, если $C\ (-3;\ 6;\ 5)$, $D\ (1;\ -4;\ -5)$.

12.10. Составьте уравнение сферы, если она проходит через точку $M\ (-6;\ 2;\ -3)$, центр сферы принадлежит оси абсцисс, а радиус сферы равен 7.

12.11. Составьте уравнение сферы, если она проходит через точку $N\ (-1;\ 2;\ -2)$, центр сферы принадлежит оси аппликат, а радиус сферы равен 3.

12.12. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2-10x+14y+2z-80=0$ является уравнение сферы; укажите координаты центра и радиус этой сферы.

12.13. Найдите координаты центра и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-16y+6z=0$.

12.14. Составьте уравнение сферы, если она проходит через точки $A\ (1;\ 1;\ -2)$ и $B\ (\sqrt{17};\ 1;\ 6)$, центр сферы принадлежит координатной плоскости yz, а радиус сферы равен $\sqrt{46}$.

12.15. Составьте уравнение сферы, если она проходит через точку $C\ (4;\ -2\sqrt{10};\ -2)$ и начало координат, центр сферы принадлежит координатной плоскости xz, а радиус сферы равен $3\sqrt{10}$.

Упражнения для повторения

12.16. Каждая из двух окружностей касается сторон угла, величина которого равна 60°. Эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус меньшей из них, если радиус большей равен 12 см.

12.17. В окружности по разные стороны от её центра проведены две параллельные хорды, длины которых равны 16 см и 32 см, а расстояние между хордами – 16 см. Найдите радиус окружности.

12.18. Основание прямой призмы – равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен $2\sqrt{2}$ см. Угол между диагоналями равных боковых граней, которые проведены из одной вершины верхнего основания, равен 60°. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

§ 13. Взаимное расположение сферы и плоскости

В курсе планиметрии вы исследовали взаимное расположение окружности и прямой и выяснили, что оно зависит от двух параметров: радиуса окружности и расстояния от центра окружности до прямой. Пространственным аналогом этой задачи является исследование взаимного расположения сферы и плоскости.

Пусть радиус данной сферы равен r, а расстояние от центра O сферы до данной плоскости α равно d, $d \geq 0$.

I случай. Пусть $d > r$. В этом случае сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 13.1).

II случай. Пусть $d < r$. Докажем, что в этом случае пересечением сферы и плоскости является окружность.

Рассмотрим случай, когда секущая плоскость не проходит через центр сферы, т. е. $d \neq 0$. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость α. Пусть A – произвольная общая точка сферы и плоскости α (рис. 13.2). Из прямоугольного треугольника OO_1A, в котором $OO_1 = d$, $OA = r$, получаем $O_1A = \sqrt{r^2 - d^2}$. Следовательно, все общие точки сферы и плоскости α при-

Рис. 13.1

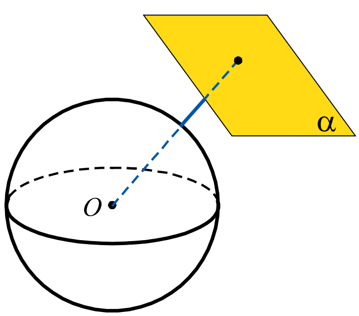
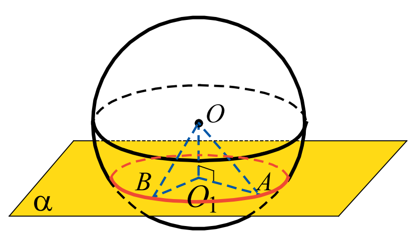


Рис. 13.2



надлежат окружности радиуса $\sqrt{r^2 - d^2}$ с центром в точке O_1. Осталось показать, что любая точка этой окружности является общей точкой сферы и плоскости α.

Пусть B – произвольная точка этой окружности. Тогда $O_1B = \sqrt{r^2 - d^2}$. Очевидно, что точка B принадлежит плоскости α. Из прямоугольного треугольника OO_1B получаем $OB = \sqrt{O_1B^2 + OO_1^2}$, т. е. $OB = \sqrt{(\sqrt{r^2 - d^2})^2 + d^2} = \sqrt{r^2} = r$. Следовательно, точка B принадлежит сфере.

Пусть секущая плоскость проходит через центр сферы, т. е. $d = 0$. Тогда в сечении получается фигура, состоящая из тех и только тех точек плоскости α, которые удалены от точки O на расстояние r. Такой фигурой является окружность радиуса r с центром в точке O. Эту окружность называют большой окружностью сферы (рис. 13.3).

Итак, *если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса, то сечением сферы плоскостью является окружность.*

Для рассматриваемого случая сечением шара плоскостью является круг.

Если плоскость проходит через центр шара, то круг, образовавшийся в сечении, называют **большим кругом шара**.

Плоскость, проходящая через центр шара, является его плоскостью симметрии.

III случай. Пусть $d = r$. В этом случае сфера и плоскость имеют только одну общую точку (рис. 13.4).

Рис. 13.3

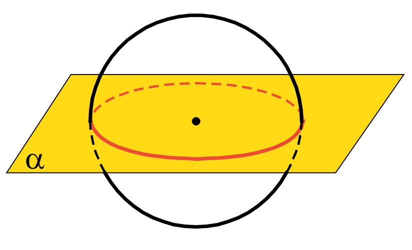
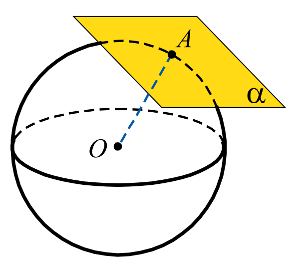


Рис. 13.4



Определение

Плоскость, имеющую со сферой (с шаром) только одну общую точку, называют касательной плоскостью к сфере (шару).

Эту общую точку называют **точкой касания**. На рисунке 13.4 точка A – точка касания.

Если фигура принадлежит касательной плоскости и имеет со сферой (с поверхностью шара) общую точку, то говорят, что сфера (шар) касается фигуры.

Теорема 13.1

Касательная плоскость к сфере (шару) перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Доказательство

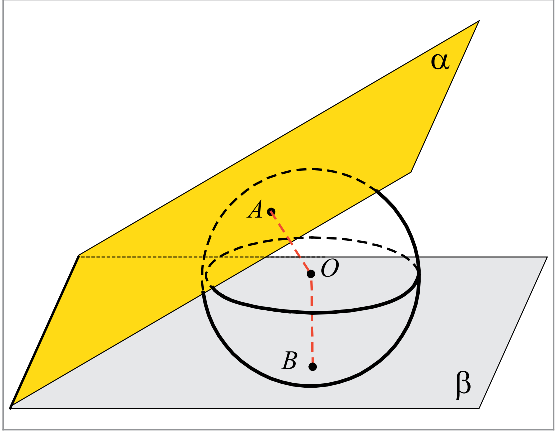
Пусть плоскость α касается сферы с центром O в точке A. Докажем, что $OA \perp \alpha$.

Предположим, что отрезок OA является наклонной к плоскости α. Тогда расстояние от точки O до плоскости α меньше радиуса. Следовательно, сфера и плоскость α пересекаются по окружности, т. е. имеют более одной общей точки. А это противоречит тому, что плоскость α касается сферы. Значит, наше предположение ошибочно, и радиус OA не является наклонной к плоскости α, т. е. $OA \perp \alpha$. ◄

Рассмотрим сферу с центром в точке O, касающуюся граней двугранного угла в точках A и B (рис. 13.5). Тогда по теореме 13.1 $OA \perp \alpha$ и $OB \perp \beta$. Поскольку $OA = OB$, то точка O равноудалена от граней двугранного угла. Следовательно, точка O принадлежит биссектору данного двугранного угла.

Итак, *если сфера касается граней двугранного угла, то центр сферы принадлежит биссектору двугранного угла.*

Рис. 13.5



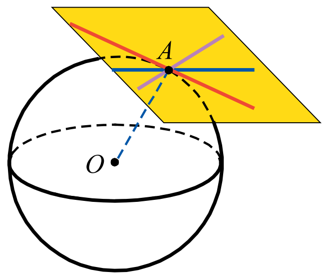
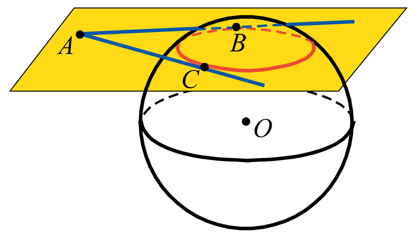
Определение

Прямую, имеющую со сферой (с шаром) только одну общую точку, называют касательной к сфере (шару).

Любая прямая, принадлежащая касательной плоскости к сфере и проходящая через точку касания, является касательной (рис. 13.6).

<u>Задача.</u> Докажите, что если через данную точку к сфере проведены касательные, то отрезки касательных, соединяющие данную точку с точками касания, равны.

Решение. Пусть прямые AB и AC — произвольные касательные, проведённые к сфере, B и C — точки касания (рис. 13.7). Докажем, что $AB = AC$.

Рис. 13.6	Рис. 13.7
	

Рассмотрим плоскость ABC. Она имеет со сферой по крайней мере две общие точки. Следовательно, расстояние от центра сферы до плоскости ABC меньше радиуса сферы. Значит, плоскость ABC пересекает сферу по окружности. Прямые AB и AC лежат с окружностью в одной плоскости и имеют с этой окружностью только по одной общей точке, т. е. они являются касательными к ней. Отсюда $AB = AC$. ◄

Заметим, что во всех утверждениях этого параграфа, где речь идёт о касании сферы с некоторой фигурой, слово «сфера» можно заменить словом «шар».

1. Опишите все возможные случаи взаимного расположения сферы и плоскости.
2. Что является сечением сферы плоскостью, если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы?
3. Что называют большим кругом шара?
4. Какую плоскость называют касательной плоскостью к сфере?
5. Каким свойством обладает радиус, проведённый в точку касания плоскости и сферы?
6. Где расположен центр сферы, касающейся граней двугранного угла?
7. Какую прямую называют касательной к сфере?

Упражнения

13.1. Сфера пересечена плоскостью на расстоянии 12 см от её центра. Длина линии пересечения сферы с плоскостью равна 10π см. Найдите радиус сферы.

13.2. Диаметр сферы равен 34 см. На каком расстоянии от центра сферы надо провести плоскость, чтобы длина линии пересечения сферы с этой плоскостью была равной 16π см?

13.3. К сфере радиусом 8 см проведена касательная плоскость. На этой плоскости выбрали точку A на расстоянии 6 см от точки касания. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от точки A до точек сферы.

13.4. К сфере радиусом 15 см проведена касательная плоскость. На этой плоскости выбрали точку K такую, что наименьшее расстояние от точки K до точек сферы равно 2 см. Найдите расстояние от точки K до точки касания сферы с плоскостью и наибольшее расстояние от точки K до точек сферы.

13.5. Через конец радиуса шара проведена плоскость, образующая с ним угол 30°. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью, если радиус шара равен 6 см.

13.6. Через конец радиуса шара проведена плоскость, образующая с этим радиусом угол 30°. Найдите радиус шара, если площадь сечения шара этой плоскостью равна 64π см^2.

13.7. Площадь большого круга шара равна Q, а площадь сечения шара плоскостью равна $\frac{Q}{2}$. На каком расстоянии от центра шара проведено сечение?

13.8. Площадь большого круга шара равна S, а площадь сечения шара плоскостью равна $\frac{2}{3}S$. На каком расстоянии от центра шара проведено сечение?

13.9. Докажите, что если плоскость α пересекает сферу с центром в точке O по окружности с центром в точке O_1, то $OO_1 \perp \alpha$.

13.10. Вершины прямоугольного треугольника лежат на поверхности шара, радиус которого 6 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника, если его гипотенуза равна 4 см.

13.11. Вершины равностороннего треугольника со стороной 9 см лежат на поверхности шара, а расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 3 см. Найдите радиус шара.

13.12. Вершины треугольника со стороной 16 см и противоположным ей углом 150° лежат на поверхности шара. Расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 12 см. Найдите радиус шара

13.13. Вершины равнобедренного треугольника с основанием 36 см и боковой стороной 30 см лежат на поверхности шара, радиус которого равен 25 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

13.14. Точки A, B, C и D принадлежат сфере. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если известно, что он параллелограмм.

13.15. Радиус шара равен 16 см. Он касается всех сторон правильного треугольника со стороной 48 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

13.16. Диагонали ромба равны 30 см и 40 см. Шар касается всех сторон ромба, а расстояние от центра шара до плоскости ромба равно 18 см. Найдите радиус шара.

13.17. Шар касается всех сторон равнобокой трапеции, основания которой равны 16 см и 36 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости трапеции, если радиус шара равен 13 см.

13.18. Шар касается всех сторон равнобокой трапеции, боковая сторона которой равна 8 см, а острый угол — 45°. Найдите радиус шара, если расстояние от его центра до плоскости трапеции равно $6\sqrt{2}$ см.

13.19. Точки A, B, C, D, E и F принадлежат сфере. Докажите, что прямые, перпендикулярные плоскостям ABC и DEF и проходящие через центры описанных окружностей треугольников ABC и DEF, пересекаются.

13.20. Из точки к сфере проведены касательные. Найдите геометрическое место точек касания.

13.21. Шар касается двух перпендикулярных плоскостей. Расстояние между точками касания равно 8 см. Найдите расстояние от центра шара до линии пересечения плоскостей.

13.22. Шар касается всех граней трёхгранного угла, все плоские углы которого прямые. Найдите расстояние от центра шара до вершины угла, если радиус шара равен 4 см.

13.23. Диаметр шара разделён двумя точками на три части в отношении $2 : 3 : 5$. Найдите отношение площадей сечений шара, проходящих через эти точки перпендикулярно диаметру шара.

13.24. Диаметр шара двумя точками разделён на три части в отношении $3 : 4 : 7$. Найдите отношение площадей сечений шара, проходящих через эти точки перпендикулярно диаметру шара.

Упражнения для повторения

13.25. На стороне AB квадрата $ABCD$ обозначена точка K, а на стороне CD — точка M так, что $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Найдите сторону квадрата, если $MK = 26$ см.

13.26. Диагонали равнобокой трапеции являются биссектрисами её тупых углов и точкой пересечения делятся в отношении 11 : 25. Найдите площадь трапеции, если её высота равна 120 см.

13.27. Найдите модуль вектора $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$, если $\vec{a}\ (-6; 10; 8)$, $\vec{b}\ (-3; 12; 6)$.

§ 14. Многогранники, вписанные в сферу

Определение

Многогранник называют вписанным в сферу (шар), если все его вершины принадлежат сфере (поверхности шара). При этом сферу называют описанной около многогранника, а шар — описанным около многогранника.

Из определения следует, что если многогранник вписан в сферу, то центр сферы равноудалён от всех его вершин. Верно и обратное утверждение: *если для данного многогранника существует точка, равноудалённая от всех его вершин, то вокруг этого многогранника можно описать сферу.*

Например, все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, пересекаются в одной точке и этой точкой делятся пополам. Следовательно, точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда равноудалена от всех его вершин. Значит, вокруг этого многогранника можно описать сферу (рис. 14.1).

На рисунке 14.2 изображён тетраэдр $ABCD$, в котором $\angle ACB = \angle ADB = 90°$. Поскольку середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин, то середина ребра AB является точкой, равноудалённой от всех вершин тетраэдра $ABCD$, т. е. является центром сферы, описанной около данного тетраэдра.

Заметим, что если около многогранника можно описать сферу, то эта сфера — единственная.

Если многогранник вписан в сферу, то плоскости его граней пересекают сферу по окружностям. Следовательно, *каждая грань многогранника, вписанного в сферу, является многоугольником, вписанным в окружность.*

Рис. 14.1

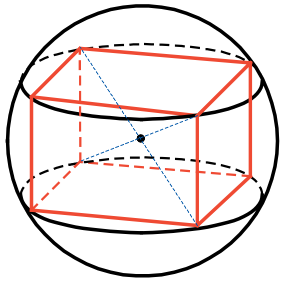
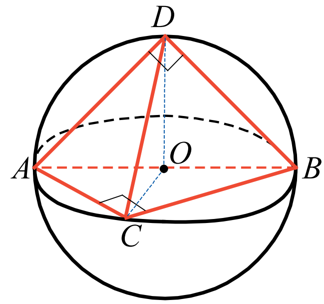


Рис. 14.2



Значит, если вокруг какой-то грани многогранника нельзя описать окружность, то вокруг этого многогранника нельзя описать сферу. Например, вокруг параллелограмма, отличного от прямоугольника, описать окружность нельзя. Следовательно, нельзя описать сферу вокруг наклонной призмы.

Докажем, что *если вокруг оснований прямой призмы можно описать окружности, то такую призму можно вписать в сферу*.

Вы знаете, что геометрическим местом точек, равноудалённых от вершин данного многоугольника, является прямая (рис. 14.3), перпендикулярная плоскости многоугольника и проходящая через центр его описанной окружности. Следовательно, если точка, равноудалённая от всех вершин рассматриваемой призмы, существует, то она лежит на прямой O_1O_2, где O_1 и O_2 – центры описанных окружностей оснований призмы (рис. 14.4). Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что середина O отрезка O_1O_2 – искомая точка, т. е. точка O – центр сферы, описанной около прямой призмы.

Рис. 14.3

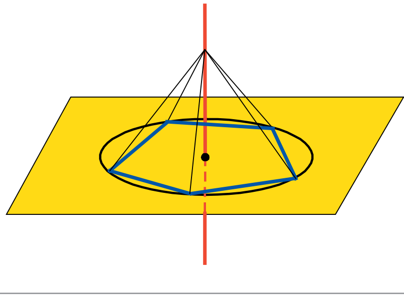
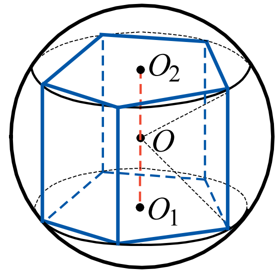


Рис. 14.4



Из сказанного следует, что *вокруг правильной призмы можно описать сферу. Центр описанной сферы принадлежит прямой, проходящей через центры оснований призмы.*

Докажем, что если вокруг основания пирамиды можно описать окружность, то такую пирамиду можно вписать в сферу.

Вы знаете, что если точка, равноудалённая от всех вершин рассматриваемой пирамиды, существует, то она принадлежит прямой a (рис. 14.5), перпендикулярной основанию пирамиды и проходящей через центр O_1 описанной окружности основания (см. ключевую задачу 4 пункта 10 учебника «Геометрия-10»).

Геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину. Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную боковому ребру SA и проходящую через его середину. Очевидно, что эта плоскость не параллельна прямой a. Пусть $a \cap \alpha = O$. Поскольку точка O равноудалена от всех вершин основания и $OS = OA$, то точка O равноудалена от всех вершин пирамиды, а значит, она является центром описанной сферы рассматриваемой пирамиды.

Из доказанного следует, что вокруг любого тетраэдра можно описать сферу.

Также *сферу можно описать вокруг правильной пирамиды. Центр описанной сферы принадлежит прямой, содержащей высоту правильной пирамиды.*

Центр окружности, описанной около многоугольника, может принадлежат многоугольнику, в частности лежать на стороне, а может и не принадлежать многоугольнику. Аналогичная ситуация возникает и в пространстве: центр сферы, описанной около многогранника, может ему принадлежать (рис 14.5), в частности лежать на грани (см. рис. 14.2), и может находиться вне многогранника (рис. 14.6).

Рис. 14.5

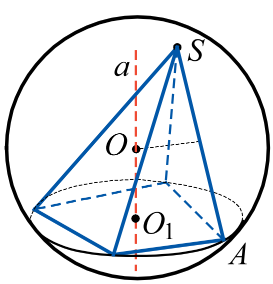
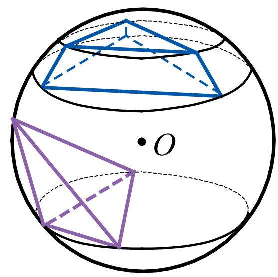


Рис. 14.6



Задача. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно b, а высота равна h. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Решение. Пусть $ABCD$ – данная треугольная пирамида, точка O_1 – центр основания ABC. По условию $DB = b$, $DO_1 = h$.

Существует три случая (рис. 14.7): центр сферы, описанной около пирамиды, может либо принадлежать внутренней области пирамиды, либо принадлежать её грани, либо не принадлежать пирамиде.

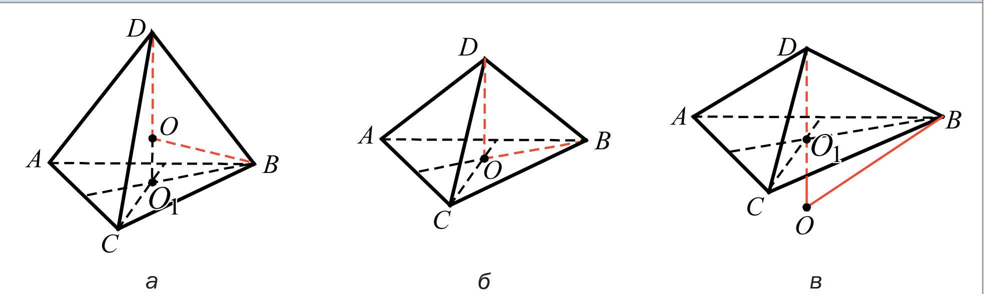
Понятно, что центр O сферы, описанной около данной пирамиды, принадлежит прямой DO_1 (см. рис. 14.7). Отрезки OD и OB – радиусы сферы.

Рассмотрим случай, когда центр O сферы лежит между точками D и O_1 (см. рис. 14.7, *а*).

Из прямоугольного треугольника DO_1B получаем $O_1B^2 = DB^2 - DO_1^2$. Отсюда $O_1B^2 = b^2 - h^2$.

Пусть радиус сферы равен R. Тогда $OO_1 = h - R$. Из прямоугольного треугольника OO_1B получаем: $OB^2 = OO_1^2 + O_1B$. Имеем: $R^2 = (h - R)^2 + b^2 - h^2$. Отсюда $R = \dfrac{b^2}{2h}$.

Рис. 14.7

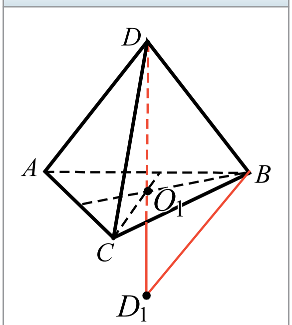


Осталось рассмотреть ещё два случая: центр O сферы совпадает с точкой O_1 (см. рис. 14.7, *б*); центр O сферы лежит вне пирамиды (см. рис. 14.7, *в*). Рассмотрев эти случаи самостоятельно, вы сможете убедиться, что ответ не изменится: $R = \dfrac{b^2}{2h}$.

Приведём ещё одно решение этой задачи, в котором нет необходимости рассматривать три случая расположения центра описанной сферы.

Прямая DO_1 проходит через центр сферы и пересекает её в двух точках: в точке D и в некоторой точке D_1 (рис. 14.8). Тогда отрезок DD_1 – диа-

Рис. 14.8



метр сферы. Плоскость DD_1B, проходя через центр сферы, пересекает шар, ограниченный этой сферой, по большому кругу. Тогда треугольник DD_1B является вписанным в большой круг с диаметром DD_1. Следовательно, $\angle DBD_1 = 90°$. Используя метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, можно записать $DB^2 = DO_1 \cdot DD_1$. Отсюда $b^2 = h \cdot 2r$; $R = \frac{b^2}{2h}$.

Ответ: $\frac{b^2}{2h}$. ◄

1. Какой многогранник называют вписанным в сферу (шар)?
2. В каком случае вокруг многогранника можно описать сферу?
3. В каком случае призму можно вписать в сферу?
4. Где расположен центр сферы, описанной около правильной призмы?
5. В каком случае пирамиду можно вписать в сферу?
6. Где расположен центр сферы, описанной около правильной пирамиды?

Упражнения

14.1. Около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 1 см, 2 см и 5 см, описан шар. Найдите объём шара.

14.2. Около прямоугольного параллелепипеда, высота которого равна 8 см, а диагонали боковых граней — 10 см и 17 см, описан шар. Найдите площадь поверхности этого шара.

14.3. Высота правильной четырёхугольной призмы равна 6 см, а радиус описанного шара — 9 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

14.4. У правильной треугольной призмы радиус описанного шара равен 13 см, а сторона основания — $5\sqrt{3}$ см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

14.5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α, а диагональ основания образует с одной из сторон основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если радиус шара, описанного около него, равен R.

14.6. Сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна a и образует с одной из диагоналей основания угол α, а диагональ параллелепипеда образует с его боковым ребром угол β. Найдите радиус шара, описанного около параллелепипеда.

14.7. В сферу вписана правильная треугольная пирамида. Боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°. Докажите, что центр сферы совпадает с основанием высоты пирамиды.

14.8. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны между собой. Докажите, что центр шара, описанного около пирамиды, совпадает с центром её основания.

14.9. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 12 см, а её диагональное сечение — прямоугольный треугольник. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

14.10. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 9 см, а её диагональное сечение — равносторонний треугольник. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

14.11. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь поверхности сферы, описанной около данной пирамиды.

14.12. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно b и образует с высотой пирамиды угол β. Найдите площадь поверхности сферы, описанной около данной пирамиды.

Упражнения для повторения

14.13. Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 12 см, а меньшая боковая сторона — $4\sqrt{3}$ см. Найдите площадь трапеции, если один из её углов равен 120°.

14.14. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 20 см, а высота, проведённая к боковой стороне, — 24 см. Найдите площадь данного треугольника.

14.15. При каких значениях x и y векторы $\vec{a}\ (x;\ 6;\ -8)$ и $\vec{b}\ (-1;\ y;\ 4)$ будут коллинеарными?

14.16. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}\ (-3;\ 6;\ 2)$ и $\vec{b}\ (-10;\ 10;\ -5)$.

§ 15. Многогранники, описанные около сферы

Определение

Многогранник называют описанным около сферы (шара), если все его грани касаются сферы. При этом сферу называют вписанной в многогранник, а шар — вписанным в многогранник.

Из определения следует, что если многогранник описан около сферы, то центр сферы равноудалён от всех его граней. Верно и обратное утверждение: *если для данного выпуклого многогранника существует точка, равноудалённая от всех его граней, то в этот многогранник можно вписать сферу.*

Например, точка пересечения диагоналей куба равноудалена от всех граней куба. Следовательно, в куб можно вписать сферу (рис. 15.1).

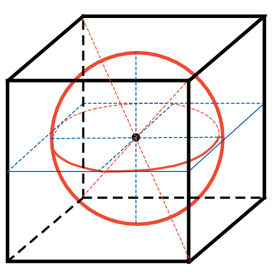
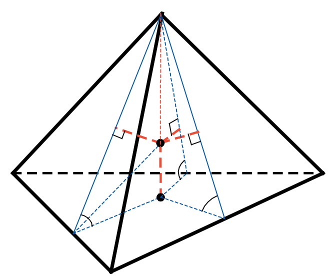
Заметим, что если в многогранник можно вписать сферу, то эта сфера единственная.

Если сфера касается граней двугранного угла, то её центр принадлежит биссектору этого угла. Следовательно, если сфера вписана в многогранник, то её центр принадлежит биссекторам всех двугранных углов при рёбрах многогранника. Верно и такое утверждение: *если все биссекторы двугранных углов при рёбрах выпуклого многогранника имеют общую точку, то в этот многогранник можно вписать сферу*.

С помощью этого утверждения можно доказать (сделайте это самостоятельно), что в любом тетраэдре существует точка, равноудалённая от всех граней. Следовательно, *в любой тетраэдр можно вписать сферу*.

Задача 1. Докажите, что если двугранные углы при рёбрах основания пирамиды равны, то в такую пирамиду можно вписать сферу.

Решение. В ключевой задаче 18.65 учебника «Геометрия-10» было доказано, что если двугранные углы при рёбрах основания пирамиды равны, то каждая точка высоты пирамиды равноудалена от её боковых граней (рис. 15.2). Тогда точка пересечения биссектора двугранного угла при ребре основания с высотой равноудалена от всех граней пирамиды. ◄

Рис. 15.1	**Рис. 15.2**
	

Из доказанного следует, что *в правильную пирамиду можно вписать сферу. Центр вписанной сферы принадлежит высоте пирамиды.*

Задача 2. Докажите, что если в основание прямой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности, то в такую призму можно вписать сферу.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 — центры окружностей радиуса r, вписанных в основания призмы (рис. 15.3). Прямая O_1O_2 параллельна плоскости каждой боковой грани призмы. Точка O_1 равноудалена от всех боковых граней призмы на расстояние r. Следовательно, любая точка прямой O_1O_2 равноудалена от плоскостей боковых граней призмы на расстояние r. Поскольку $O_1O_2 = 2r$, то середина O отрезка O_1O_2 равноудалена от всех граней призмы. ◄

Из доказанного следует, что *в правильную призму, высота которой равна диаметру окружности, вписанной в основание призмы, можно вписать сферу. Центр сферы является серединой отрезка, соединяющего центры оснований призмы.*

Справедливо и такое утверждение: *если в прямую призму можно вписать сферу, то в основание призмы можно вписать окружность с радиусом, равным радиусу сферы, а высота призмы равна диаметру сферы.* Докажите это утверждение самостоятельно.

Задача 3. В прямую четырёхугольную призму, основанием которой является равнобокая трапеция с основаниями 16 см и 4 см, вписана сфера. Найдите боковое ребро призмы.

Решение. Поскольку в призму вписана сфера, то в основание призмы можно вписать окружность, и диаметр этой окружности равен диаметру вписанной сферы, т. е. боковому ребру призмы.

Поскольку основанием призмы является трапеция, то диаметр вписанной окружности равен высоте этой трапеции. Найдём высоту трапеции.

Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) – основание призмы (рис. 15.4). Поскольку в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + CD$.

Рис. 15.3

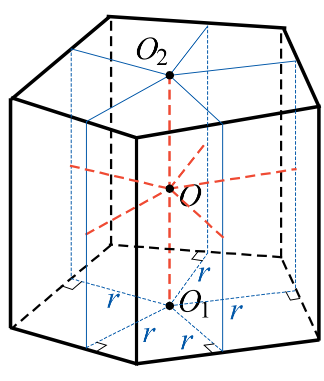
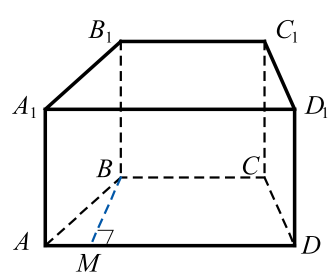


Рис. 15.4



С учётом условия получаем, что $AB + CD = 20$ см. Поскольку $AB = CD$, то $AB = 10$ см.

Проведём высоту BM трапеции.

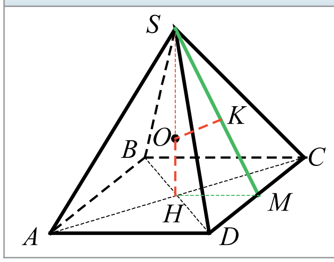
Поскольку трапеция $ABCD$ равнобокая, то $AM = \frac{AD - BC}{2}$, т. е. $AM = 6$ см. Из прямоугольного треугольника ABM получаем $MB = \sqrt{AB^2 - AM^2}$. Тогда $MB = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

Высота трапеции равна диаметру вписанной окружности. Тогда диаметр вписанной сферы равен 8 см, а следовательно, и боковое ребро равно 8 см.

Ответ: 8 см. ◄

<u>Задача 4.</u> Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, у которой ребро основания равно a, а высота — h.

Рис. 15.5



Решение. Поскольку данная пирамида правильная, то центр O вписанной сферы принадлежит высоте SH пирамиды, где H — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ (рис. 15.5). Тогда отрезок OH — радиус вписанной сферы. Пусть $OH = r$.

В грани DSC проведём апофему SM. Имеем: $SH \perp DC$, $SM \perp DC$. Следовательно, $DC \perp HSM$. В плоскости SHM проведём $OK \perp SM$, точка K принадлежит апофеме SM. Поскольку $DC \perp HSM$ и $OK \subset HSM$, то $DC \perp OK$. Имеем: $OK \perp SM$, $OK \perp DC$. Следовательно, $OK \perp DSC$. Значит, отрезок OK — радиус вписанной сферы, $OK = r$.

Прямоугольные треугольники ASM и KSO имеют общий острый угол. Следовательно, эти треугольники подобны. Тогда можно записать $\frac{OK}{HM} = \frac{SO}{SM}$. Имеем: $OS = h - r$, $HM = \frac{a}{2}$, $SM = \sqrt{HM^2 + SH^2}$, т. е.

$$SM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}.$$

Получаем: $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{h - r}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}}$. Отсюда $r\sqrt{a^2 + 4h^2} = ah - ar$;

$$r = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}.$$

Ответ: $\frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}$. ◄

1. Какой многогранник называют описанным около сферы (шара)?
2. В какой многогранник можно вписать сферу (шар)?
3. Каким свойством должны обладать биссекторы двугранных углов при рёбрах выпуклого многогранника, чтобы в этот многогранник можно было вписать сферу?
4. Каким свойством должны обладать двугранные углы при рёбрах основания пирамиды, чтобы в эту пирамиду можно было вписать сферу?
5. Где расположен центр сферы, вписанной в правильную пирамиду?
6. Какими свойствами должны обладать основание и высота прямой призмы, чтобы в неё можно было вписать сферу?
7. Каким свойством должна обладать высота правильной призмы, чтобы в неё можно было вписать сферу?
8. Какая точка является центром шара, вписанного в правильную призму?

Упражнения

15.1. В куб, ребро которого равно 6 см, вписан шар. Найдите радиус шара и площадь его поверхности.

15.2. В правильную треугольную призму вписана сфера. Найдите отношение стороны основания призмы к её высоте.

15.3. В правильную четырёхугольную призму вписана сфера. Найдите отношение стороны основания призмы к её высоте.

15.4. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную шестиугольную призму, сторона основания которой равна 14 см.

15.5. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную призму, сторона основания которой равна 6 см.

15.6. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и острым углом 30°. В призму вписан шар. Найдите радиус этого шара.

15.7. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 16 см, 28 см и 30 см. В призму вписан шар. Найдите радиус этого шара.

15.8. В прямую призму вписан шар, радиус которого равен 4 см. Найдите площадь основания призмы, если площадь её боковой поверхности равна 48 см^2.

15.9. В прямую призму вписана сфера. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если площадь её основания равна 8 см^2.

15.10. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании — α.

15.11. Найдите радиус шара, вписанного в правильную шестиугольную пирамиду, высота которой равна h, а двугранный угол при основании – β.

15.12. В правильной четырёхугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а радиус шара, вписанного в неё, равен r. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

15.13. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а радиус шара, вписанного в неё, равен r. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

15.14. Высота правильной треугольной пирамиды равна 12 см, а апофема – 13 см. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

15.15. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 9 см, а противоположные боковые грани образуют угол $60°$. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

15.16. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной 8 см и углом при вершине $120°$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны $60°$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

15.17. Основанием пирамиды является ромб со стороной 50 см и большей диагональю 80 см. Высота пирамиды равна 32 см и проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

15.18. В правильную четырёхугольную пирамиду вписана сфера. Найдите радиус этой сферы, если боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол α, а расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно m.

15.19. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна b, а высота – h. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду.

Упражнения для повторения

15.20. Найдите площадь параллелограмма, диагонали которого равны 16 см и 20 см и одна из них перпендикулярна стороне.

15.21. Высота ромба равна 12 см, а меньшая диагональ – 15 см. Найдите площадь ромба.

15.22. Основание пирамиды – треугольник с углами α и β и радиусом описанной окружности r. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании пирамиды равны φ.

15.23. Коллинеарны ли векторы $\vec{m}$ $(8; -10; 6)$ и $\vec{n}$ $(-4; 5; -3)$? Найдите координаты вектора $\vec{k}$, который коллинеарен вектору $\vec{n}$ и модуль которого в три раза больше модуля вектора $\vec{n}$.

§ 16. Комбинации цилиндра и конуса со сферой

Определение

Цилиндр называют вписанным в сферу (шар), если окружности оснований цилиндра принадлежат сфере (поверхности шара) (рис. 16.1)**. При этом сферу называют описанной, а шар — описанным около цилиндра.**

Вы знаете, что около любого прямоугольника можно описать окружность, причём центр описанной окружности является серединой отрезка, соединяющего середины противолежащих сторон прямоугольника.

На рисунке 16.2 изображён прямоугольник, вокруг которого описана окружность. Прямая l, проходящая через середины противолежащих сторон прямоугольника, является осью симметрии этой фигуры. Будем вращать прямоугольник вместе с описанной окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, описанную около цилиндра.

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующему утверждению: *около любого цилиндра можно описать сферу, причём центр сферы — это середины отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения цилиндра.*

Определение

Конус называют вписанным в сферу (шар), если вершина конуса и окружность его основания принадлежат сфере (поверхности шара) (рис. 16.3)**. При этом сферу называют описанной, а шар — описанным около конуса.**

Рис. 16.1

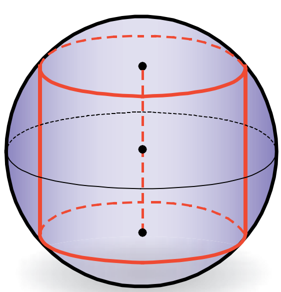


Рис. 16.2

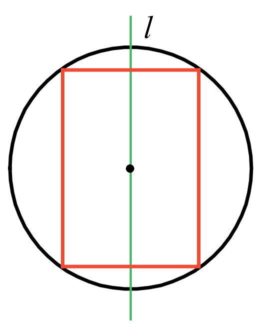
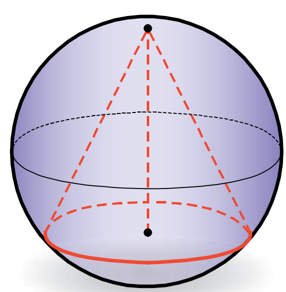


Рис. 16.3



На рисунке 16.4 изображён равнобедренный треугольник, вокруг которого описана окружность. Прямая l, содержащая высоту треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии этой фигуры. Будем вращать треугольник вместе с описанной окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, описанную около конуса.

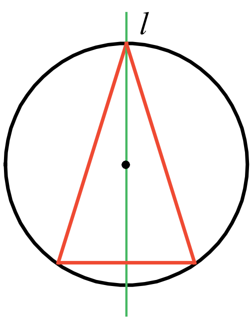
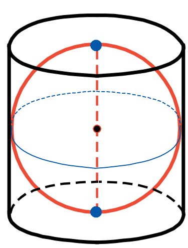
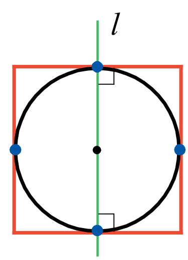
Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующему утверждению: *около любого конуса можно описать сферу, причём центр описанной сферы шара принадлежит оси конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса.*

Определение

Цилиндр называют описанным около сферы (шара), если сфера (шар) касается всех образующих цилиндра и его оснований (рис. 16.5)**. При этом сферу называют вписанной, а шар — вписанным в цилиндр.**

Вы знаете, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то он является квадратом.

На рисунке 16.6 изображён квадрат, в который вписана окружность. Прямая l, проходящая через центр окружности перпендикулярно противолежащим сторонам квадрата, является осью симметрии этой фигуры. Будем вращать квадрат вместе с вписанной него окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, вписанную в цилиндр.

Рис. 16.4	**Рис. 16.5**	**Рис. 16.6**
		

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующему утверждению: *если осевым сечением цилиндра является квадрат, то в такой цилиндр можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы — это середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу основания цилиндра.*

Определение

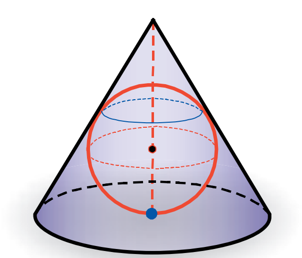
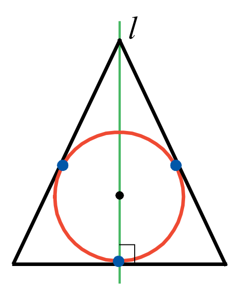
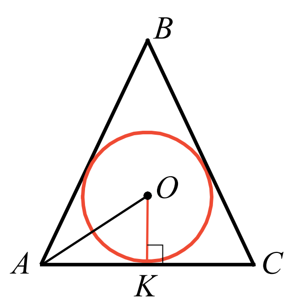
Конус называют описанным около сферы (шара), если сфера (шар) касается всех образующих конуса и его основания (рис. 16.7)**. При этом сферу называют вписанной, а шар — вписанным в конус.**

На рисунке 16.8 изображён равнобедренный треугольник, в который вписана окружность. Прямая l, содержащая высоту треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии этой фигуры. Будем вращать равнобедренный треугольник вместе с вписанной в него окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, вписанную в конус.

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующему утверждению: *в любой конус можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы принадлежит высоте конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса.*

Задача. Найдите радиус сферы, вписанной в конус, радиус основания которого равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

Решение. На рисунке 16.9 изображён равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), являющийся осевым сечением данного конуса, и вписанная в него окружность. Радиус этой окружности равен радиусу сферы, вписанной в конус.

Рис. 16.7	Рис. 16.8	Рис. 16.9
		

Пусть точка O — центр окружности и K — точка касания этой окружности со стороной AC. Тогда $OK \perp AC$ и $AK = KC$, отрезок AK — радиус основания конуса.

По условию задачи $\angle BAC = \alpha$, $AK = r$. Поскольку O — это точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\angle OAK = \frac{\alpha}{2}$.

Из прямоугольного треугольника AOK получаем: $OK = AK \operatorname{tg} \angle OAK$, т. е. $OK = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. ◀

1. Какую сферу (шар) называют описанной (описанным) около цилиндра?
2. Какая точка является центром сферы, описанной около цилиндра?
3. Чему равен радиус сферы, описанной около цилиндра?
4. Какую сферу (шар) называют описанной (описанным) около конуса?
5. Где расположен центр сферы, описанной около конуса?
6. Чему равен радиус сферы, описанной около конуса?
7. Какую сферу (шар) называют вписанной (вписанным) в цилиндр?
8. В каком случае в цилиндр можно вписать сферу?
9. Какая точка является центром сферы, вписанной в цилиндр?
10. Чему равен радиус сферы, вписанной в цилиндр?
11. Какую сферу (шар) называют вписанной (вписанным) в конус?
12. Где расположен центр сферы, вписанной в конус?
13. Чему равен радиус сферы, вписанной в конус?

Упражнения

16.1. Высота цилиндра равна h и образует с диагональю осевого сечения цилиндра угол α. Найдите радиус сферы, описанной около цилиндра.

16.2. Радиус основания цилиндра равен r. Диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол α. Найдите радиус сферы, описанной около цилиндра.

16.3. В сферу радиуса r вписан цилиндр, осевое сечение которого — квадрат. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

16.4. В шар радиуса r вписан конус, основание которого — большой круг шара. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

16.5. В цилиндр вписана сфера, радиус которой равен r. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

16.6. Радиус основания конуса равен 6 см, а угол при вершине осевого сечения конуса — 30°. Найдите радиус шара, описанного около конуса.

16.7. Радиус основания конуса равен 8 см, а его осевое сечение — равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите радиус сферы, описанной около конуса.

16.8. Радиус основания конуса равен 15 см, а высота — 36 см. Найдите радиусы шаров, вписанного в конус и описанного около него.

16.9. Радиус основания конуса равен 8 см, а его образующая — 17 см. Найдите радиусы шаров, вписанного в конус и описанного около него.

16.10. Образующая конуса равна a и образует с плоскостью основания угол α. Найдите радиусы шаров, вписанного в конус и описанного около него.

16.11. Радиус основания конуса равен R, а угол при вершине осевого сечения конуса — α. Найдите радиусы шаров, вписанного в конус и описанного около него.

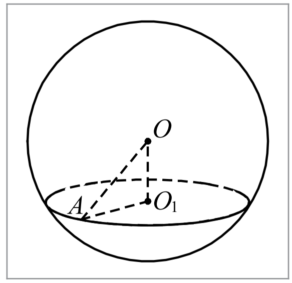
Упражнения для повторения

16.12. В треугольник ABC вписан ромб $AMFK$ так, что угол A у них общий, а вершина F принадлежит стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB = 10$ см, $AC = 15$ см.

16.13. В окружности проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Найдите длину отрезка AC, если $CM = 3$ см, $BM = 9$ см, $BD = 12$ см.

16.14. Найдите модуль вектора $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $60°$.

Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме



1. В шаре с центром O, изображённом на рисунке, проведено сечение с центром O_1 на расстоянии 12 см от центра шара. Найдите радиус шара, если радиус сечения равен 9 см.

А) 10 см Б) 12 см В) 15 см Г) 21 см

2. Угол между образующей и плоскостью основания цилиндра равен 60°, высота конуса равна $9\sqrt{3}$ см. Чему равна образующая конуса?

А) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см Б) $18\sqrt{3}$ см В) 13,5 см Г) 18 см

3. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, диаметр основания которого равен 12 см, а образующая — 17 см.

А) 102π см^2 Б) 204π см^2 В) 34π см^2 Г) 68π см^2

4. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра, осевым сечением которого является квадрат со стороной 8 см.

А) 32π см^2 Б) 64π см^2 В) 128π см^2 Г) 256π см^2

5. Укажите уравнение сферы, проходящей через начало координат, с центром в точке A (1; –2; 3).

А) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$
Б) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=14$
В) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=2$
Г) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=2$

6. Укажите уравнение сферы с центром в точке B (–4; 5; –8), которая касается плоскости yz.

А) $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-8)^2=8$
Б) $(x+4)^2+(y-5)^2+(z+8)^2=64$
В) $(x+4)^2+(y-5)^2+(z+8)^2=4$
Г) $(x+4)^2+(y-5)^2+(z+8)^2=16$

7. Найдите радиус сферы $x^2+y^2+z^2-2x+6y-6=0$.

А) 2 Б) 4 В) 6 Г) 16

8. Хорда нижнего основания цилиндра видна из центра этого основания под углом α. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой данной хорды, наклонен к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания равен r.

А) $2\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$ В) $2\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$

Б) $2\pi r^2 \cos\alpha\operatorname{tg}\beta$ Г) $2\pi r^2 \sin\alpha\operatorname{tg}\beta$

9. Площадь боковой поверхности конуса равна 240π см^2. Чему равна высота конуса, если радиус его основания равен 12 см?
А) 12 см Б) 16 см В) 20 см Г) 2 см

10. Высота цилиндра равна 8 см, радиус основания – 5 см. На расстоянии 4 см от оси цилиндра параллельно ей проведена плоскость. Найдите площадь сечения, образовавшегося при этом.
А) 40 см^2 Б) 24 см^2 В) 48 см^2 Г) 64 см^2

11. В основании конуса проведена хорда, которую видно из центра основания под углом α, а из вершины конуса – под углом β. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания равен r.

А) $\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ В) $\dfrac{\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

Б) $\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ Г) $\dfrac{\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

12. Чему равна площадь боковой поверхности усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 6 см и 10 см, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен 30°?

А) $32\pi\sqrt{3}$ см^2 В) $\dfrac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ см^2

Б) $\dfrac{128\pi\sqrt{3}}{3}$ см^2 Г) 128π см^2

13. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около данной призмы.

А) $\dfrac{\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{\sin^2\alpha}$ В) $\dfrac{\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{2\sin^2\alpha}$

Б) $\dfrac{\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{\cos^2\alpha}$ Г) $\dfrac{\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\alpha}$

14. Через конец радиуса шара проведено сечение, образующее с этим радиусом угол 30°. Найдите площадь поверхности шара, если площадь сечения равна 36π см^2.

А) $6\sqrt{2}$ см Б) 6 см В) $12\sqrt{2}$ см Г) 12 см

15. Катет прямоугольного треугольника равен a, а прилежащий угол равен α. Найдите площадь боковой поверхности конуса, образованного при вращении этого треугольника вокруг данного катета.

А) $\dfrac{\pi a^2 \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$ В) $\dfrac{\pi a^2 \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$

Б) $\pi a^2 \operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$ Г) $\pi a^2 \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$

16. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием b и углом β при основании. Все двугранные углы при рёбрах основания пирамиды равны α. Найдите образующую конуса, вписанного в данную пирамиду.

А) $\dfrac{b\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$ Б) $\dfrac{b\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2\cos\alpha}$ В) $\dfrac{b\operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}$ Г) $\dfrac{b\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha}$

17. В шар радиуса r вписана правильная четырёхугольная призма, диагональ которой наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите сторону основания призмы.

А) $2r\sin\alpha$ Б) $2r\cos\alpha$ В) $r\sqrt{2}\sin\alpha$ Г) $r\sqrt{2}\cos\alpha$

18. Апофема правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при ребре основания равен α. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду.

А) $h\sin\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ Б) $\dfrac{h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$ В) $h\cos\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ Г) $\dfrac{h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$

Итоги главы 2

Площадь боковой поверхности цилиндра

За площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра принимают площадь его развёртки боковой поверхности.

$S_{бок} = 2\pi rh$, где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности цилиндра, r — радиус основания цилиндра, h — длина образующей (высоты) цилиндра.

Площадь полной поверхности цилиндра

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$, где $S_{полн}$ — площадь полной поверхности цилиндра, $S_{осн}$ — площадь основания цилиндра.

$S_{полн} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Комбинации цилиндра с призмой

Призму называют вписанной в цилиндр, если её основания вписаны в основания цилиндра. При этом цилиндр называют описанным около призмы.

Призму называют описанной около цилиндра, если её основания описаны около оснований цилиндра. При этом цилиндр называют вписанным в призму.

Площадь боковой поверхности конуса

За площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса принимают площадь его развёртки боковой поверхности.

$S_{бок} = \pi rl$, где r — радиус основания конуса, l — длина образующей конуса.

Площадь полной поверхности конуса

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$, где $S_{полн}$ — площадь полной поверхности конуса, $S_{осн}$ — площадь основания конуса.

$S_{полн} = \pi rl + \pi r^2$

Площадь боковой поверхности усечённого конуса

$S_{бок} = \pi(r + r_1)l$, где r и r_1 — радиусы оснований, l — длина образующей конуса.

Комбинации конуса с пирамидой

Пирамиду называют вписанной в конус, если её основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называют описанным около пирамиды.

Пирамиду называют описанной около конуса, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называют вписанным в пирамиду.

Сфера и шар

Сферой называют ГМТ пространства, равноудалённых от заданной точки

Шаром называют ГМТ пространства, расстояние от которых до заданной точки не более данного положительного числа.

Уравнение сферы

Уравнением сферы с центром в точке A (a; b; c) и радиусом r является уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, где $r > 0$.

Взаимное расположение сферы и плоскости

Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечением сферы плоскостью является окружность.

Плоскость, имеющую со сферой (с шаром) только одну общую точку, называют касательной плоскостью к сфере (шару). Эту общую точку называют точкой касания. В этом случае расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы.

Касательная плоскость к сфере (шару) перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Прямую, имеющую со сферой (с шаром) только одну общую точку, называют касательной к сфере (шару).

Многогранник, вписанный в сферу

Многогранник называют вписанным в сферу (шар), если все его вершины принадлежат сфере (поверхности шара). При этом сферу называют описанной около многогранника, а шар — описанным около многогранника.

Каждая грань многогранника, вписанного в сферу, является многоугольником, вписанным в окружность.

Если вокруг оснований прямой призмы можно описать окружности, то такую призму можно вписать в сферу.

Вокруг правильной призмы можно описать сферу. Центр описанной сферы принадлежит прямой, проходящей через центры оснований призмы.

Вокруг правильной пирамиды можно описать сферу. Центр описанной сферы принадлежит прямой, содержащей высоту правильной пирамиды.

Многогранник, описанный около сферы

Многогранник называют описанным около сферы (шара), если все его грани касаются сферы. При этом сферу называют вписанной в многогранник, а шар — вписанным в многогранник.

Если для данного выпуклого многогранника существует точка, равноудалённая от всех его граней, то в этот многогранник можно вписать сферу.

Если все биссекторы двугранных углов при рёбрах выпуклого многогранника имеют общую точку, то в этот многогранник можно вписать сферу.

В любой тетраэдр можно вписать сферу.

В правильную призму, высота которой равна диаметру окружности, вписанной в основание призмы, можно вписать сферу. Центр сферы является серединой отрезка, соединяющего центры оснований призмы.

Комбинации цилиндра со сферой

Цилиндр называют вписанным в сферу (шар), если окружности оснований цилиндра принадлежат сфере (поверхности шара). При этом сферу называют описанной, а шар — описанным около цилиндра.

Около любого цилиндра можно описать сферу, причём центр сферы — это середины отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения цилиндра.

Цилиндр называют описанным около сферы (шара), если сфера (шар) касается всех образующих цилиндра и его оснований. При этом сферу называют вписанной, а шар — вписанным в цилиндр.

Если осевым сечением цилиндра является квадрат, то в такой цилиндр можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы — это середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу основания цилиндра.

Комбинации конуса со сферой

Конус называют вписанным в сферу (шар), если вершина конуса и окружность его основания принадлежат сфере (поверхности шара). При этом сферу называют описанной, а шар — описанным около конуса.

Около любого конуса можно описать сферу, причём центр описанной сферы шара принадлежит оси конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса.

Конус называют описанным около сферы (шара), если сфера (шар) касается всех образующих конуса и его основания. При этом сферу называют вписанной, а шар — вписанным в конус.

В любой конус можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы принадлежит высоте конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса.

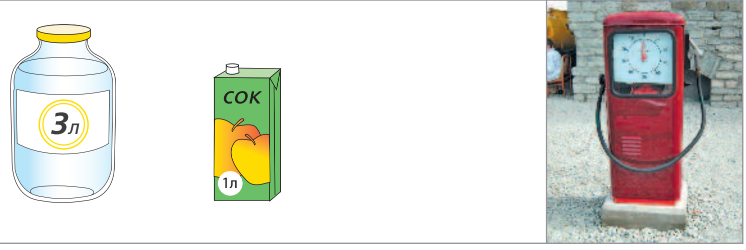
Глава 3. Объёмы тел. Площадь сферы

В этой главе вы подробнее познакомитесь с уже известным вам понятием объёма, изучите новые формулы для вычисления объёмов многогранников и тел вращения. Научитесь находить площадь сферы.

§ 17. Объём тела. Формула для вычисления объёма призмы

С такой величиной, как объём, вы часто встречаетесь в повседневной жизни: объём пакета сока, объём стеклянной банки, показатели потребления воды или топлива на счётчиках (рис. 17.1). С понятием объёма вы познакомились в курсе математики 5 класса. Кроме того, это понятие вы неоднократно использовали, например, на уроках физики, химии.

Рис. 17.1



Изучая планиметрию, вы часто встречались с такой геометрической величиной, как площадь фигуры. Объём тела в стереометрии является аналогом площади фигуры в планиметрии. Увидеть эту аналогию несложно, если сравнить определение площади многоугольника, изученное вами в 8 классе, со следующим определением.

Определение

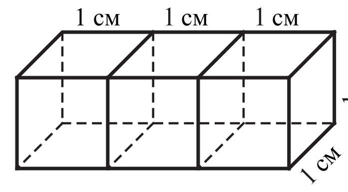
Объёмом тела называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:
1) равные тела имеют равные объёмы;
2) если тело составлено из нескольких других тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел;
3) за единицу измерения объёма тела принимают единичный куб, т. е. куб со стороной, равной единице измерения длины.

В этом параграфе изучим объём многогранников.

Измерить объём многогранника — это значит сравнить его объём с объёмом единичного куба. В результате получают числовое значение объёма данного многогранника. Это число показывает, во сколько раз объём данного многогранника отличается от объёма единичного куба.

Покажем, как, опираясь на определение, найти объём, например, прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 1 см, 1 см и 3 см (рис. 17.2).

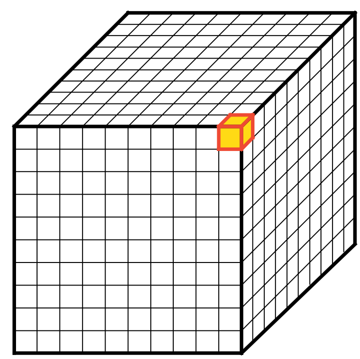
Рис. 17.2



Такой параллелепипед можно разбить на три куба со стороной 1 см. Из свойства (2) объёма следует, что объём данного параллелепипеда равен трём объёмам куба со стороной 1 см (коротко записывают: 3 см^3).

Ещё один пример. Найдём объём V куба со стороной 1 мм, принимая за единицу измерения длины 1 см. Если рёбра единичного куба (куба со стороной 1 см) разделить на 10 равных частей и через точки деления провести плоскости, параллельные его граням (рис. 17.3), то единичный куб разобьётся на 1000 равных кубиков со стороной 1 мм. По свойству (1) объёма все они имеют один и тот же объём V. По свойству (2) объёма имеем:

Рис. 17.3



$$1 = \underbrace{V + V + \ldots + V}_{1000}.$$

Отсюда $V = \dfrac{1}{1000}$ см^3.

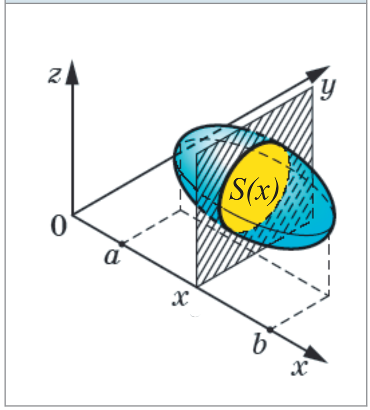
Находить объёмы тел, в частности многогранников, опираясь только на определение, часто является сложной задачей. Например, непросто сравнить объём треугольной пирамиды с объёмом единичного куба. Недаром формулу для вычисления объёма пирамиды, найденную учёными Древней Греции, считают одним из величайших достижений античной науки.

В то же время из курса алгебры вы знаете, что для вычисления объёма тела можно воспользоваться формулой

$$V = \int_a^b S(x)dx, \qquad (1)$$

где $S(x)$ – площадь фигуры, полученной при пересечении тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс, а промежуток $[a; b]$ является проекцией тела на ось абсцисс (рис. 17.4).

Рис. 17.4



Опираясь на формулу (1), вычислим объёмы призмы.

Рассмотрим призму с высотой, равной h, и основанием, площадь которого равна S.

Введём систему координат так, чтобы одно из оснований призмы лежало в плоскости $x = 0$, а высота призмы принадлежала положительной полуоси абсцисс (рис. 17.5). Тогда проекцией призмы на ось абсцисс является промежуток $[0; h]$.

Ясно, что сечением призмы любой плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс, является многоугольник, равный основанию призмы (рис. 17.6). Поэтому $S(x) = S$ для всех значений $x \in [0; h]$. Опираясь на формулу (1), получаем:

$$V = \int_0^h S dx = Sx\Big|_0^h = Sh.$$

Рис. 17.5

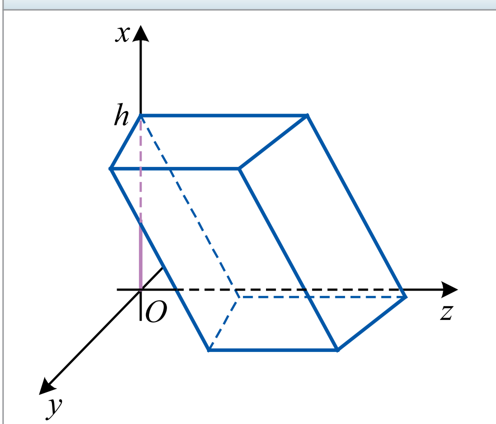
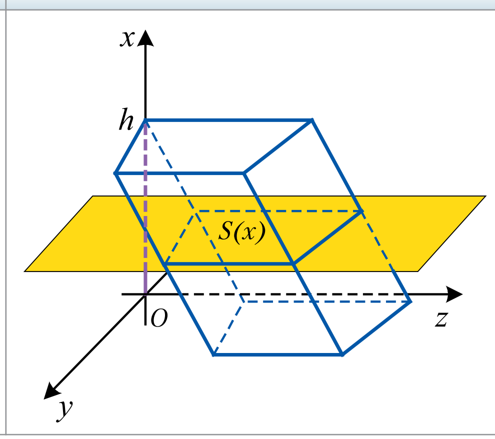


Рис. 17.6



Таким образом,

объём V призмы с высотой, равной h, и основанием, площадь которого равна S, вычисляют по формуле

$$V = Sh$$

1. Что называют объёмом тела?
2. Что значит измерить объём многогранника?
3. По какой формуле вычисляют объём призмы?

Упражнения

17.1. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 3 см, 5 см и 4 см.

17.2. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 140 см^3, а два его измерения — 5 см и 7 см. Найдите третье измерение параллелепипеда.

17.3. Площадь поверхности куба равна 96 см^2. Найдите его объём.

17.4. Объём куба равен 64 см^3. Найдите площадь его поверхности.

17.5. Каждое ребро прямого параллелепипеда равно 6 см, а острый угол основания — 30°. Найдите объём параллелепипеда.

17.6. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с основанием 16 см и боковой стороной 17 см. Диагональ боковой грани, содержащей основание этого треугольника, образует с плоскостью основания призмы угол 30°. Найдите объём призмы.

17.7. Основанием прямой призмы является ромб с диагоналями 12 см и 16 см. Диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объём призмы.

17.8. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно 4 см. Найдите объём призмы.

17.9. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно 2 см. Найдите объём призмы.

17.10. Диагональное сечение правильной четырёхугольной призмы — квадрат, площадь которого равна 16 см^2. Найдите объём призмы.

17.11. Боковая грань правильной шестиугольной призмы является квадратом, диагональ которого равна $6\sqrt{2}$ см. Найдите объём призмы.

17.12. Основание прямой призмы — ромб с острым углом 30°. Диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объём призмы, если её высота равна 9 см.

17.13. Основание прямой призмы — ромб с острым углом 45°. Диагональ боковой грани равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите объём призмы.

17.14. Основанием наклонного параллелепипеда является параллелограмм, стороны которого равны 4 см и 9 см, а острый угол — 30°. Боковое ребро параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45° и равно 6 см. Найдите объём параллелепипеда.

17.15. Основанием наклонной призмы является равнобедренный треугольник с боковой стороной 6 см и углом при вершине $120°$. Боковое ребро призмы равно 4 см и образует с плоскостью основания угол $30°$. Найдите объём призмы.

17.16. Основанием наклонной призмы является треугольник со сторонами 4 см, 13 см и 15 см. Боковое ребро призмы равно 8 см и образует с плоскостью основания угол $45°$. Найдите объём призмы.

17.17. В прямоугольном параллелепипеде одна из сторон основания равна 8 см. Диагональ параллелепипеда равна 16 см и образует с боковой гранью, содержащей эту сторону, угол $45°$. Найдите объём параллелепипеда.

17.18. В прямоугольном параллелепипеде одна из сторон основания равна 6 см, а боковое ребро — 4 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол $30°$. Найдите объём параллелепипеда.

17.19. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной, равной a, и острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объём параллелепипеда.

17.20. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с острым углом α. Большая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объём параллелепипеда, если меньшая диагональ его основания равна d.

17.21. Объём правильной треугольной призмы равен V. Найдите объём призмы, вершины которой — середины сторон оснований данной призмы.

17.22. Объём правильной четырёхугольной призмы равен V. Найдите объём призмы, вершины которой — середины сторон оснований данной призмы.

17.23. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, содержащей боковую сторону треугольника, равна d и образует с плоскостью основания угол β. Найдите объём призмы.

17.24. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с основанием, равным b, и углом β при вершине. Диагональ грани, содержащей боковую сторону треугольника, образует с плоскостью основания угол γ. Найдите объём призмы.

17.25. Основание прямой призмы — треугольник со стороной, равной c, и прилежащими к ней углами α и β. Диагональ боковой грани, проходящей через сторону основания, противоположную углу α, наклонена к плоскости основания под углом γ. Найдите объём призмы.

17.26. Основание прямой призмы — треугольник со стороной, равной a, противолежащим этой стороне углом α и прилежащим углом β. Диагональ боковой грани, содержащей сторону основания, к которой прилежат углы α и β, наклонена к плоскости основания под углом γ. Найдите объём призмы.

17.27. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45°. Объём призмы равен 108 см^3. Найдите площадь полной поверхности призмы.

17.28. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 30°. Объём призмы равен $48\sqrt{3}$ см^3. Найдите площадь полной поверхности призмы.

17.29. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом, равным a, и противолежащим углом α. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объём призмы.

17.30. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом α. Диагональ боковой грани, содержащей катет, противолежащий углу α, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объём призмы.

17.31. В правильной четырёхугольной призме диагональ боковой грани равна 17 см, а площадь боковой поверхности — 480 см^2. Найдите объём призмы.

17.32. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна 25 см, а площадь боковой поверхности — 504 см^2. Найдите объём призмы.

17.33. Докажите, что объём наклонной призмы равен произведению площади сечения призмы плоскостью, перпендикулярной её боковым рёбрам, на длину бокового ребра пирамиды.

17.34. Боковое ребро наклонного параллелепипеда равно 9 см. Сечение параллелепипеда плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является прямоугольником, стороны которого равны 6 см и 3 см. Найдите объём параллелепипеда.

17.35. Боковое ребро наклонного параллелепипеда равно 8 см. Сечение параллелепипеда плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является параллелограммом, стороны которого равны 2 см и 3 см, а острый угол — 45°. Найдите объём параллелепипеда.

17.36. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной, равной a. Проекцией одной из вершин верхнего основания на плоскость нижнего основания является центр этого основания, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найдите объём призмы.

17.37. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник. Высота призмы равна h. Проекцией одной из вершин верхнего основания на плоскость нижнего основания является центр этого основания, а боковое ребро призмы образует с её высотой угол β. Найдите объём призмы.

17.38. Одна из сторон основания прямоугольного параллелепипеда равна 4 см, а угол между диагоналями основания, лежащий против этой стороны, — 60°. Сечение, проходящее через диагональ нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол 45°. Найдите объём параллелепипеда.

17.39. Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм, острый угол которого равен α, а площадь — S. Площади двух соседних боковых граней параллелепипеда равны M и N. Найдите объём параллелепипеда.

17.40. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, площадь которого равна S, а площади диагональных сечений равны P и Q. Найдите объём параллелепипеда.

17.41. Основанием прямой призмы является равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c. Через один из катетов нижнего основания и середину противоположного бокового ребра проведено сечение, площадь которого равна Q. Найдите объём призмы.

17.42. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен a. Через второй катет и противоположную ему вершину верхнего основания проведено сечение, площадь которого равна S. Найдите объём призмы, если её высота равна h.

17.43. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция, основания которой равны 4 см и 16 см, а диаметр окружности, вписанной в трапецию, в два раза меньше диагонали призмы. Найдите объём призмы.

17.44. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция, боковая сторона которой равна 5 см, а диаметр вписанной окружности — 3 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите объём призмы.

17.45. Угол между диагоналями двух боковых граней правильной треугольной призмы, проведёнными из одной вершины, равен α. Найдите объём призмы, если диагональ боковой грани равна d.

17.46. Угол между диагоналями двух боковых граней правильной четырёхугольной призмы, проведёнными из одной вершины, равен α. Найдите объём призмы, если диагональ боковой грани равна d.

17.47. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник со стороной 3 см. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является ромбом с диагональю 4 см. Найдите объём призмы.

17.48. Основанием наклонной призмы является квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а площадь каждой из двух других граней равна 36 см^2. Боковые рёбра призмы равны рёбрам основания и образуют с плоскостью основания угол 30°. Найдите объём призмы.

17.49. Все грани призмы — равные ромбы со стороной 8 см и острым углом 60°. Найдите объём призмы.

17.50. Основанием призмы является равнобедренный прямоугольный треугольник. Боковая грань, проходящая через один из катетов основания, является квадратом со стороной 4 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объём призмы.

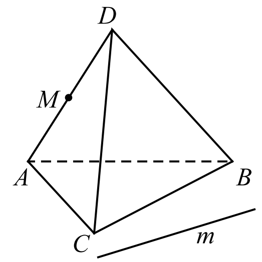
Упражнения для повторения

17.51. В прямоугольном треугольнике медианы, проведённые к катетам, равны $2\sqrt{73}$ см и $4\sqrt{13}$ см. Найдите катеты треугольника.

17.52. Две окружности с центрами O_1 и O_2 имеют внешнее касание в точке C. Прямая, которая проходит через точку C, пересекает окружность с центром O_1 в точке A, а вторую окружность — в точке B. Хорда AC равна 12 см, а хорда BC — 18 см. Найдите радиусы окружностей, если $O_1O_2 = 20$ см.

17.53. В треугольной пирамиде $ABCD$ (рис. 17.7) точка M принадлежит ребру AD. Постройте сечение пирамиды, которое проходит через точку M и прямую m, лежащую в плоскости ABC.

Рис. 17.7



17.54. При каком значении p векторы $\vec{m}\ (3; -2; p)$ и $\vec{n}\ (-9; 6; -12)$ коллинеарны? При каком значении p вектор $\vec{m}$ будет перпендикулярен оси z? Найдите уравнение плоскости, которая содержит ось z и перпендикулярна вектору $\vec{m}$.

§ 18. Формулы для вычисления объёмов пирамиды и усечённой пирамиды

В курсе алгебры 11 класса была выведена формула для вычисления объёма пирамиды:

объём V пирамиды с высотой, равной h, и основанием, площадь которого равна S, вычисляют по формуле

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

Задача. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а боковое ребро — b.

Решение. Основанием правильной треугольной пирамиды (рис. 18.1) является правильный треугольник со стороной a. Поэтому площадь основания данной пирамиды равна

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Проведём высоту SO данной пирамиды и найдём её длину (см. рис. 18.1). Поскольку пира-

Рис. 18.1

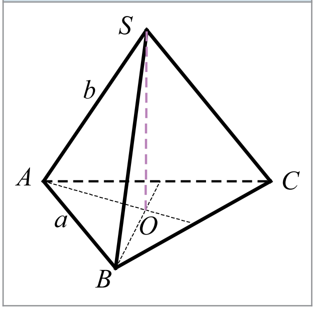
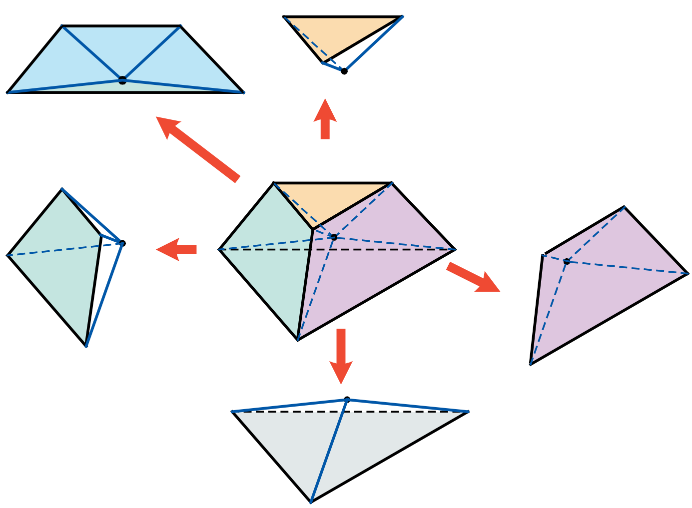


Рис. 18.2



мида правильная, то точка O является центром правильного треугольника ABC. Поэтому отрезок AO – радиус описанной окружности треугольника ABC. Имеем:

$$AO = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Теперь высоту SO можно найти из прямоугольного треугольника SOA. Имеем:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

Таким образом, используя формулу $V = \frac{1}{3}Sh$, находим объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}.$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$.

Формулу для вычисления объёма пирамиды можно использовать для вычисления объёмов выпуклых многогранников, поскольку произвольный выпуклый многогранник можно разбить на конечное число пирамид. Действительно, выберем внутри такого многогранника произвольную точку и рассмотрим пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, а вершинной – выбранная точка. Теперь ясно, что объём выпуклого многогранника можно найти как сумму объёмов пирамид, на которые его можно разбить (рис. 18.2).

Можно доказать, что на пирамиды разбивается не только выпуклый, но и произвольный многогранник. Поэтому объём произвольного многогранника можно найти как сумму объёмов пирамид, на которые он разбивается.

Рис. 18.3

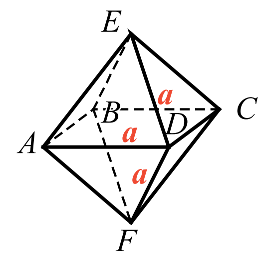
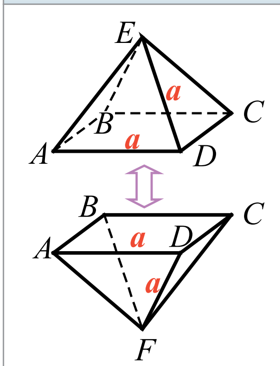


Рис. 18.4



Задача. Найдите объём правильного октаэдра с ребром a (рис. 18.3).

Решение. Разобьём правильный октаэдр $ABCDEF$ на две равные правильные треугольные пирамиды $ABCDE$ и $ABCDF$ (рис. 18.4). Поскольку все рёбра пирамиды $ABCDE$ равны a, то несложно установить, что площадь основания этой пирамиды равна $S = a^2$, а высота $h = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ (проведите эти рассуждения самостоятельно). Поэтому объём пирамиды $ABCDE$ равен

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$$

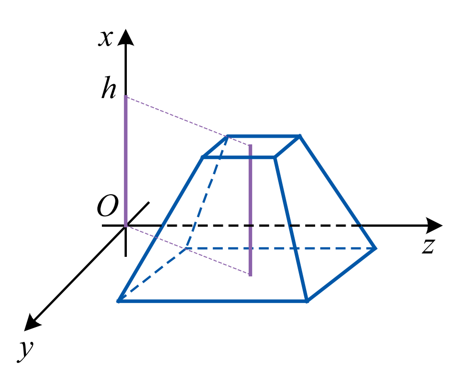
Поскольку данный октаэдр состоит из двух таких пирамид, то его объём равен

$$V_{\text{октаэдра}} = 2V_{\text{пирамиды}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

На рисунке 18.5 изображена усечённая пирамида с высотой, равной h, и основаниями, площади которых равны S_1 и S_2. Проекцией этой пирамиды на ось абсцисс является промежуток $[0; h]$. Используя формулу $V = \int\limits_0^h S(x)dx$, можно показать, что ***объём V усечённой пирамиды с высотой, равной h, и основаниями, площади которых равны S_1 и S_2, вычисляют по формуле***

Рис. 18.5



$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)h}}$$

1. По какой формуле вычисляют объём пирамиды?
2. По какой формуле вычисляют объём усечённой пирамиды?

Упражнения

18.1. Основанием пирамиды является треугольник ABC, $AB = BC = 8$ см, $AC = 6$ см. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 5 см.

18.2. Основанием пирамиды является треугольник ABC, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle ABC = 30°$, её высота равна 5 см. Найдите объём пирамиды.

18.3. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, если сторона её основания равна 6 см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 30°.

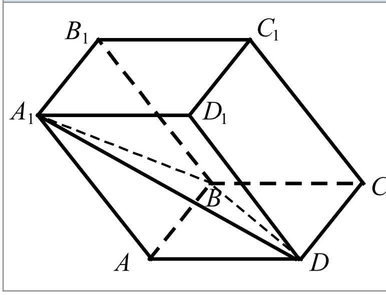
18.4. Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°.

18.5. Стороны оснований правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равны 3 см и 5 см, а высота — 4 см. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.6. Стороны оснований правильной усечённой треугольной пирамиды равны 2 см и 4 см, а высота — 5 см. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.7. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через прямую BD и точку A_1 (рис. 18.6). Найдите объём параллелепипеда, если объём пирамиды A_1ABD равен V.

Рис. 18.6



18.8. В призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение, делящее ребро AA_1 на две равные части (рис. 18.7). Найдите объём призмы, если объём пирамиды $MABC$ равен V.

18.9. Точки M, K и P — середины рёбер A_1D_1, D_1C_1 и DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно (рис. 18.8). Найдите объём пирамиды D_1MKP, если объём куба равен V.

18.10. На рисунке 18.9 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки E, F и N принадлежат рёбрам A_1B_1, A_1D_1 и AA_1 соответственно, $A_1E : EB_1 = 2 : 1$, $A_1F : FD_1 = 3 : 1$, $A_1N : NA = 2 : 3$. Найдите объём пирамиды A_1EFN, если объём куба равен V.

Рис. 18.7

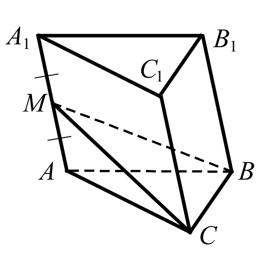


Рис. 18.8

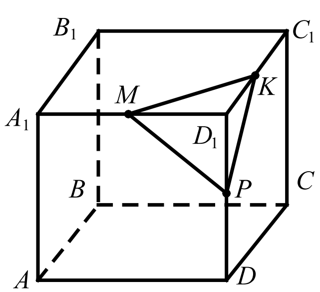
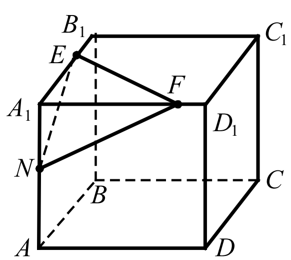


Рис. 18.9



18.11. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна d, а боковая грань образует с плоскостью основания угол α. Найдите объём пирамиды.

18.12. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна h, а боковое ребро образует с высотой пирамиды угол φ. Найдите объём пирамиды.

18.13. Диагональное сечение правильной четырёхугольной пирамиды — равносторонний треугольник, площадь которого равна S. Найдите объём пирамиды.

18.14. Площадь диагонального сечения правильной четырёхугольной пирамиды равна S, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найдите объём пирамиды.

18.15. В правильной четырёхугольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α, а отрезок, соединяющий середину высоты с серединой апофемы, равен a. Найдите объём пирамиды.

18.16. В правильной четырёхугольной пирамиде высота образует с боковым ребром угол φ, а основание высоты удалено от середины бокового ребра на расстояние m. Найдите объём пирамиды.

18.17. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с основанием 6 см и боковой стороной 5 см. Все боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания угол 60°. Найдите объём пирамиды.

18.18. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной 8 см и углом 120° при вершине. Каждое боковое ребро пирамиды равно 17 см. Найдите объём пирамиды.

18.19. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом, равным b, и противолежащим ему углом β. Все боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Найдите объём пирамиды.

18.20. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом α. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол γ. Найдите объём пирамиды.

18.21. Сторона меньшего основания правильной усечённой треугольной пирамиды равна 4 см, а боковое ребро равно 6 см и образует с плоскостью большего основания угол 45°. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.22. Стороны оснований правильной усечённой треугольной пирамиды равны 3 см и 6 см, а боковое ребро образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.23. В правильной четырёхугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно 3 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объём пирамиды.

18.24. В правильной треугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно 3 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объём пирамиды.

18.25. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а двугранный угол при боковом ребре — 120°. Найдите объём пирамиды.

18.26. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 4 см, а двугранный угол при боковом ребре — 120°. Найдите объём пирамиды.

18.27. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a, а плоский угол при вершине — α. Найдите объём пирамиды.

18.28. В правильной треугольной пирамиде апофема равна a, а плоский угол при вершине — α. Найдите объём пирамиды.

18.29. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 15 см, 16 см и 17 см, а все двугранные углы при рёбрах основания равны 60°. Найдите объём пирамиды.

18.30. Основанием пирамиды является треугольник, две стороны которого равны 8 см и 3 см, а угол между ними — 60°. Все двугранные углы при рёбрах основания равны 30°. Найдите объём пирамиды.

18.31. Основание пирамиды — ромб со стороной, равной a, и углом α. Все двугранные углы при рёбрах основания равны β. Найдите объём пирамиды.

18.32. Основанием пирамиды является ромб с углом α. Все двугранные углы при рёбрах основания равны φ. Найдите объём пирамиды, если её высота равна h.

18.33. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной a, и углом α при вершине. Боковое ребро, проходящее через вершину угла α, перпендикулярно плоскости основания, а боковая грань, содержащая основание треугольника, образует с плоскостью основания угол φ. Найдите объём пирамиды.

18.34. Основанием пирамиды является ромб со стороной, равной a, и углом α. Боковые грани, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а две другие грани образуют с плоскостью основания угол β. Найдите объём пирамиды.

18.35. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом, равным a, и прилежащим к нему острым углом α. Две боковые грани, содержащие катеты этого треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья наклонена к ней под углом β. Найдите объём пирамиды.

18.36. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом, равным b, и противолежащим ему острым углом β. Две боковые грани, содержащие катеты этого треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья наклонена к ней под углом α. Найдите объём пирамиды.

18.37. Основанием пирамиды является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 6 см. Боковая грань, содержащая один из катетов, перпендикулярна плоскости основания и является правильным треугольником. Найдите объём пирамиды.

18.38. Основанием пирамиды является квадрат с диагональю $14\sqrt{2}$ см. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является треугольником со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Найдите объём пирамиды.

18.39. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник со стороной, равной a. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой, равной a. Найдите объём пирамиды.

18.40. Основанием пирамиды является квадрат со стороной, равной a. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является равносторонним треугольником. Найдите объём пирамиды.

18.41. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной a, и углом α при основании. Боковая грань пирамиды, содержащая основание этого треугольника, перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом β. Найдите объём пирамиды.

18.42. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Боковая грань пирамиды, содержащая основание этого треугольника, перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом β. Найдите объём пирамиды, если её высота равна h.

18.43. Стороны оснований правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равны 4 см и 6 см, а боковая грань образует с плоскостью большего основания угол 30°. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.44. Сторона меньшего основания правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равна $4\sqrt{2}$ см, а боковое ребро равно 6 см и образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.45. Стороны оснований правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равны 4 см и 6 см, а высота полной пирамиды — 3 см. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.46. Стороны оснований правильной усечённой треугольной пирамиды равны 3 см и 6 см, а высота полной пирамиды — 10 см. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.47. Основания усечённой пирамиды — равнобедренные треугольники со сторонами 5 см, 5 см, 6 см и 10 см, 10 см, 12 см соответственно. Все боковые рёбра образуют с плоскостью большего основания угол 45°. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.48. Основания усечённой пирамиды — равнобедренные треугольники, основания которых равны 6 см и 8 см соответственно, а угол, лежащий против основания, равен 150°. Все боковые рёбра образуют с плоскостью большего основания угол 60°. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.49. Основания усечённой пирамиды — треугольники со сторонами 13 см, 14 см, 15 см и 26 см, 28 см, 30 см соответственно. Все боковые грани образуют с плоскостью основания угол 60°. Найдите объём усечённой пирамиды.

18.50. Меньшее основание усечённой пирамиды — треугольник со сторонами 8 см, 26 см и 30 см. Боковые грани образуют с плоскостью большего основания углы по 45°, а высоты боковых граней равны $3\sqrt{2}$ см. Найдите объём усечённой пирамиды.

Упражнения для повторения

18.51. В прямоугольном треугольнике угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 30°. Найдите острые углы треугольника.

18.52. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 13$ см, $AD = 15$ см, $AC = 4\sqrt{37}$ см. Найдите площадь параллелограмма.

18.53. В треугольной пирамиде все рёбра основания равны a, а все боковые рёбра — b. Найдите расстояние между боковым ребром и ребром основания, не лежащим с ним в одной плоскости.

18.54. Образующая конуса на 24 см больше радиуса его основания, а полная поверхность конуса равна 576π см^2. Найдите радиус основания и образующую конуса.

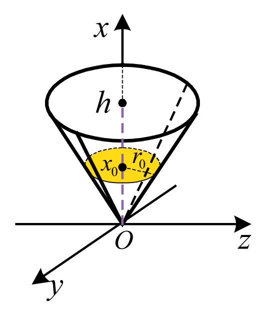
§ 19. Объёмы тел вращения

В этом параграфе вы продолжите изучение объёмов тел и познакомитесь с формулами для вычисления объёмов тел вращения: конуса, цилиндра, шара и т. д. Как и при изучении объёмов многогранников, будем пользоваться формулой

$$V=\int_a^b S(x)dx. \qquad (1)$$

Опираясь на формулу (1), вычислим объём конуса.

Рис. 19.1



Рассмотрим конус с высотой, равной h, и основанием, радиус которого равен r.

Введём систему координат так, чтобы вершина конуса совпадала с началом координат, а высота конуса принадлежала положительной полуоси абсцисс (см. рис. 19.1). Тогда проекцией конуса на ось абсцисс является промежуток $[0; h]$.

Сечением конуса плоскостью $x = x_0$ будет круг радиусом r_0 (см. рис. 19.1) Поскольку плоскость сечения параллельна плоскости основания конуса, то

$$\frac{x_0}{h}=\frac{r_0}{r}.$$

Получаем, что $r_0=\frac{rx_0}{h}$. Поэтому площадь сечения равна

$$S(x_0)=\pi r_0^2=\frac{\pi r^2x_0^2}{h^2}.$$

Опираясь на формулу (1), имеем:

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h\frac{\pi r^2x^2}{h^2}dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

Таким образом,

объём конуса с высотой, равной h, и радиусом основания r вычисляют по формуле

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\pi r^2h}$$

Заметим, что $\pi r^2 = S$, где S — площадь основания конуса. Поэтому ***объём конуса с высотой, равной h, и основанием, площадь которого равна S, вычисляют по формуле***

$$\boxed{V=\frac{1}{3}Sh}$$

Обратите внимание, что полученная формула для вычисления объёма конуса совпадает с формулой для вычисления объёма пирамиды.

Рассуждая аналогично, можно установить, что:
объём усечённого конуса можно вычислить по формулам

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)h$$

где h — длина высоты усечённого конуса, r_1 и r_2 — радиусы оснований, а S_1 и S_2 — площади оснований усечённого конуса;
объём цилиндра можно вычислить по формулам

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$$

$$\boldsymbol{V = Sh}$$

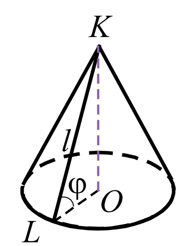
где h — длина высоты цилиндра, r — радиус основания цилиндра, S — площадь основания цилиндра;
объём шара можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

где r — радиус шара.

<u>Задача.</u> Найдите объём конуса, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом φ.

Рис. 19.2



Решение. На рисунке 19.2 изображён конус, образующая KL которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом φ. Пусть O – центр основания конуса. Из прямоугольного треугольника KLO найдём радиус основания r и высоту конуса h. Имеем:

$$r = l\cos\varphi,$$
$$h = l\sin\varphi.$$

Используя формулу $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, находим объём конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\varphi \sin\varphi.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\varphi \sin\varphi$.

1. По какой формуле вычисляют объём конуса?
2. По какой формуле вычисляют объём усечённого конуса?
3. По какой формуле вычисляют объём цилиндра?
4. По какой формуле вычисляют объём шара?

Упражнения

19.1. Радиус основания цилиндра равен 4 см, а высота — 6 см. Найдите объём цилиндра.

19.2. Высота цилиндра равна 4 см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите объём цилиндра.

19.3. Радиус основания цилиндра равен 3 см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объём цилиндра.

19.4. Радиус основания конуса равен 4 см, а его высота — 6 см. Найдите объём конуса.

19.5. Осевое сечение конуса — правильный треугольник, площадь которого равна $4\sqrt{3}$ см^2. Найдите объём конуса.

19.6. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, площадь которого равна 16 см^2. Найдите объём конуса.

19.7. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник, высота которого равна h, а угол при вершине — α. Найдите объём конуса.

19.8. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a, а угол при основании — α. Найдите объём конуса.

19.9. Радиусы оснований усечённого конуса равны 8 см и 6 см, а его высота — 3 см. Найдите объём усечённого конуса.

19.10. Радиусы оснований усечённого конуса равны 12 см и 2 см, а его образующая — 13 см. Найдите объём усечённого конуса.

19.11. В усечённом конусе образующая равна 5 см, высота — 3 см, а радиус большего основания — 7 см. Найдите объём усечённого конуса.

19.12. Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r ($R > r$), а угол между образующей и плоскостью большего основания равен α. Найдите объём усечённого конуса.

19.13. Радиус большего основания усечённого конуса равен R, а его образующая равна l и наклонена к плоскости большего основания под углом α. Найдите объём усечённого конуса.

19.14. Радиус шара равен 6 см. Найдите его объём.

19.15. Радиусы двух шаров относятся как 3 : 4. Найдите отношение их объёмов.

19.16. Объёмы двух шаров относятся как 8 : 27. Найдите отношение их радиусов.

19.17. Во сколько раз надо уменьшить радиус шара, чтобы его объём уменьшился в 5 раз?

19.18. Высота цилиндра равна h, а площадь его осевого сечения равна Q. Найдите объём цилиндра.

19.19. Радиус основания цилиндра равен r, а площадь его осевого сечения равна S. Найдите объём цилиндра.

19.20. Развёртка боковой поверхности цилиндра – квадрат со стороной m. Найдите объём цилиндра.

19.21. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу, градусная мера которой равна $120°$, и удалённое от оси цилиндра на 3 см. Найдите объём цилиндра, если диагональ полученного сечения равна 12 см.

19.22. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, находящееся на расстоянии 4 см от его оси. Диагональ полученного сечения равна 10 см. Найдите объём цилиндра, если радиус его основания равен 12 см.

19.23. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которая видна из центра этого основания под углом β. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой этой хорды, равен a и образует с плоскостью нижнего основания угол α. Найдите объём цилиндра.

19.24. В основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом α и которая находится на расстоянии d от центра этого основания. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол φ. Найдите объём цилиндра.

19.25. В основании конуса проведена хорда, которая равна радиусу основания и удалена от центра основания конуса на 12 см. Через вершину конуса и эту хорду проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объём конуса.

19.26. Через две образующие конуса проведено сечение, которое пересекает основание по хорде длиной 8 см. Эта хорда видна из центра основания конуса под углом $90°$. Найдите объём конуса, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол $45°$.

19.27. Образующая конуса равна l. Из центра основания конуса к образующей проведён перпендикуляр, который образует с высотой конуса угол α. Найдите объём конуса.

19.28. Угол между образующей конуса и его высотой равен α. Отрезок, соединяющий центр основания конуса с серединой образующей, равен m. Найдите объём конуса.

19.29. В основании конуса проведена хорда длиной a, которую видно из центра основания под углом α. Отрезок, соединяющий вершину конуса с серединой этой хорды, образует с плоскостью основания угол β. Найдите объём конуса.

19.30. В основании конуса проведена хорда, которая находится на расстоянии d от центра основания и которую видно из этого центра под углом α, а из вершины конуса — под углом β. Найдите объём конуса.

19.31. Прямоугольный треугольник, острый угол которого равен 30°, вращается вначале вокруг одного катета, а затем вокруг другого. Найдите отношение объёмов образовавшихся конусов.

19.32. В усечённом конусе отношение радиусов оснований равно 2, а образующая длиной 8 см образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найдите объём усечённого конуса.

19.33. Радиусы оснований усечённого конуса относятся как 3 : 7, а высота равна 8 см. Угол между высотой усечённого конуса и его образующей равен 60°. Найдите объём усечённого конуса.

19.34. Радиус основания цилиндра равен 6 см, а его высота — 4 см. Найдите радиус шара, равновеликого этому цилиндру.

19.35. Радиус основания конуса равен 2 см, а его высота — 3 см. Найдите радиус шара, равновеликого этому конусу.

19.36. На расстоянии 3 см от центра шара проведено сечение. Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и поверхности шара, если объём шара равен $\frac{500\pi}{3}$ см^3.

19.37. На расстоянии 5 см от центра шара проведено сечение, площадь которого равна 144π см^2. Найдите объём шара.

19.38. Через одну образующую цилиндра проведены два сечения, угол между плоскостями которых равен 120°, а площадь каждого из полученных сечений равна 48 см^2. Найдите объём цилиндра, если его высота равна 8 см.

19.39. Через одну образующую цилиндра проведено два сечения, угол между плоскостями которых равен 60°, а площадь каждого из полученных сечений равна 42 см^2. Найдите объём цилиндра, если радиус его основания равен $2\sqrt{3}$ см.

19.40. Сечение, проведённое через две образующие конуса, имеет площадь S. Это сечение пересекает основание конуса по хорде, которую видно из вершины конуса под углом α. Плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол β. Найдите объём конуса.

19.41. Диагонали осевого сечения усечённого конуса делятся точкой пересечения на отрезки длиной 5,1 см и 11,9 см, а его образующая равна 10 см. Найдите объём усечённого конуса.

19.42. В усечённом конусе диагонали осевого сечения перпендикулярны, а его образующая равна 4 см и образует с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объём усечённого конуса.

19.43. Через конец радиуса шара проведено сечение, плоскость которого образует с этим радиусом угол α. Найдите объём шара, если площадь сечения равна S.

Упражнения для повторения

19.44. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка M. Найдите площадь четырёхугольника $AMCD$, если $AM = 13$ см, $AB = 12$ см, $BD = 20$ см.

19.45. Окружность, центр которой принадлежит гипотенузе прямоугольного треугольника, касается большего катета и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если катеты равны 5 см и 12 см.

19.46. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (2; 1; –8), B (1; –5; 0), C (8; 1; –4) и D (9; 7; –12) является ромбом.

§ 20. Площадь сферы

Изучая такие круглые тела, как цилиндр и конус, вы узнали, что поверхность этих тел можно развернуть на плоскость (см. рис. 7.8, 9.5). Площадями поверхностей (площадями полных поверхностей) цилиндра и конуса называют площади развёрток.

В отличие от цилиндра и конуса, сферу (поверхность шара) нельзя развернуть на плоскость. Поэтому площадь сферы определяют другим способом.

Рассмотрим шар с центром в точке O радиуса r (рис. 20.1). Представим, что на этот шар нанесли тонкий однородный слой краски (рис. 20.2). Обозна-

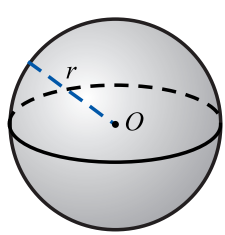


Рис. 20.1

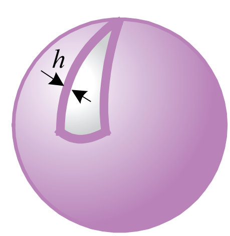


Рис. 20.2

чим площадь сферы через $S_{\text{сферы}}$, толщину слоя краски — h, а объём краски — V_h. Краска будет образовывать так называемую *атмосферу* шара толщины h. Ясно, что атмосфера шара толщины h состоит из всех точек шара с центром в точке O и радиуса $r + h$, не принадлежащих данному шару.

Поскольку краска нанесена на шар однородным тонким слоем, то естественно считать, что

$$V_h \approx S_{\text{сферы}} h$$

или

$$S_{\text{сферы}} \approx \frac{V_h}{h}.$$

Ясно, что чем тоньше слой краски, тем точнее записанное приближённое равенство.

На основе этого равенства введём определение площади поверхности шара.

Определение

Площадью поверхности шара называют предел отношения $\frac{V_h}{h}$ при h, стремящемся к нулю, где V_h — объём атмосферы шара толщины h.

Теорема 20.1

Площадь поверхности шара радиуса r равна

$$\boxed{S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2}$$

Доказательство

Рассмотрим шар радиуса r (см. рис. 20.1). Найдём объём V_h атмосферы шара толщины h (см. рис. 20.2). Имеем:

$$V_h = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left((r+h)^3 - r^3\right).$$

Применяя формулу разности кубов двух выражений, получаем:

$$V_h = \frac{4}{3}\pi\left((r+h)^3 - r^3\right) = \frac{4}{3}\pi h\left((r+h)^2 + (r+h)r + r^2\right).$$

Далее запишем:

$$S_{\text{сферы}} = \lim_{h\to 0}\frac{V_h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4}{3}\pi\left((r+h)^2 + (r+h)r + r^2\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2. \blacktriangleleft$$

1. Что называют площадью поверхности шара?
2. По какой формуле вычисляют площадь сферы?

Упражнения

20.1. Радиус шара равен 4 см. Найдите площадь его поверхности.

20.2. Радиус шара увеличили в 3 раза. Как при этом изменилась площадь его поверхности?

20.3. Площадь поверхности шара увеличили в 9 раз. Во сколько раз увеличился его объём?

20.4. Площадь большого круга шара равна S. Найдите площадь поверхности этого шара.

20.5. Площадь поверхности шара равна S. Найдите площадь большого круга этого шара.

20.6. На расстоянии 5 см от центра шара проведено сечение, площадь которого равна 144π см^2. Найдите площадь поверхности шара.

20.7. Плоскость, находящаяся на расстоянии 8 см от центра шара, пересекает его поверхность по линии, длина которой равна 12π см. Найдите площадь поверхности шара.

20.8. Гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника являются диаметрами трёх шаров. Найдите площадь поверхности большего шара, если площади поверхностей меньших равны S_1 и S_2.

20.9. Один из углов треугольника равен $120°$. Его стороны являются диаметрами трёх шаров. Найдите площадь поверхности большего шара, если площади поверхностей меньших равны S_1 и S_2.

Упражнения для повторения

20.10. Длины диагоналей ромба относятся как $\sqrt{5} : 2$. Найдите площадь ромба, если его периметр равен 36 см.

20.11. Найдите радиус окружности, описанной около равнобокой трапеции, основания которой равны 11 см и 21 см, а боковая сторона — 13 см.

Когда сделаны уроки

Определение Минковского

Изучая стереометрию, вы, возможно, заметили, что в учебнике присутствуют два различных подхода к понятию площади поверхности тела. Так, площадь поверхности цилиндра и конуса определена как площадь их развёртки на плоскость. Аналогичным образом, по сути дела, определена и площадь поверхности произвольного многогранника. Действительно, если поверхность многогранника разрезать по всем рёбрам и образовавшиеся при этом многоугольники (грани многогранника) разложить на плоскости без пересечений, то получится развёртка многогранника на плоскость. Ясно, что площадь поверхности многогранника равна площади его развёртки.

К сожалению, идея развёртки непригодна в общем случае. Например, сферу нельзя развернуть на плоскость. Поэтому площадь сферы определена иначе. Оказывается, определение площади сферы можно развить и обобщить для произвольных поверхностей в пространстве.

Напомним, что при определении площади сферы рассматривалась атмосфера — множество точек, находящихся вне сферы и отстоящих от неё на расстояние, не превосходящее h.

В случае произвольной поверхности используют так называемый окутывающий слой.

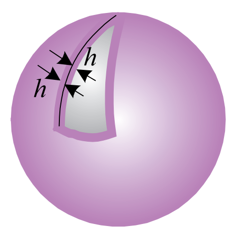
Определение

Окутывающим слоем толщины h поверхности Ф называют множество точек, отстоящих от поверхности Ф на расстояние, не большее чем h.

Точки окутывающего слоя, в отличие от атмосферы, расположены с обеих сторон поверхности. Такой подход позволяет не беспокоиться о том, с какой стороны поверхности расположены точки окутывающего слоя.

Например, окутывающим слоем толщины h сферы радиуса R, где $h < R$, с центром в точке O будет множество точек шара радиуса $R + h$ с центром в точке O, не лежащих внутри шара радиуса $R - h$ с тем же центром (рис. 20.3).

Рис. 20.3



Обозначим $S_Ф$ — площадь поверхности Ф, V_h — объём окутывающего слоя толщины h поверхности Ф. Поскольку точки окутывающего слоя расположены с обеих сторон поверхности Ф, то имеет место приближённое равенство

$$S_Ф \approx \frac{V_h}{2h}.$$

Ясно, что чем меньше величина h, тем точнее записанное приближённое равенство.

На основе этого равенства введём определение площади поверхности.

Определение

Площадью поверхности Ф называют предел отношения $\frac{V_h}{2h}$ при h, стремящемся к нулю, где V_h — объём окутывающего слоя толщины h этой поверхности, т. е.

$$S_\Phi = \lim_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}.$$

Это определение предложил один из выдающихся математиков своего времени — Герман Минковский.

Герман Минковский (1864–1909)

Родился в Алексотах (ныне Каунасский район). Преподавал в Боннском, Кёнигсбергском, Цюрихском, Гёттингенском университетах. Основные труды — в области геометрии, теории чисел и математической физики. Вместе с Г.Ф. Вороным был основоположником современной геометрической теории чисел. В 1986 г. установил некоторые важные свойства многомерных выпуклых многогранников и тем самым положил начало важному разделу геометрии — теории выпуклых тел.

Покажем, что определение Минковского согласуется с ранее введённым определением площади сферы.

Действительно, рассмотрим сферу радиуса R и её окутывающий слой толщины h. Тогда объём V_h этого окутывающего слоя будет равен разности объёмов шаров с радиусами радиусов $R+h$ и $R-h$. Имеем:

$$V_h = \frac{4}{3}\pi(R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi(R-h)^3 = \frac{4}{3}\pi\left((R+h)^3 - (R-h)^3\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(6R^2h + 2h^3\right) = \frac{8}{3}\pi h\left(3R^2 + h^2\right).$$

Поэтому согласно определению Минковского площадь сферы равна

$$S_\Phi = \lim_{h\to 0}\frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\cdot\frac{8}{3}\pi h\left(3R^2+h^2\right) = \lim_{h\to 0}\frac{4}{3}\pi\left(3R^2+h^2\right) = 4\pi R^2,$$

что совпадает с полученной ранее формулой площади сферы.

Рассматривая окутывающие слои поверхностей известных вам тел, например цилиндра, конуса, многогранников, вы самостоятельно можете проверить, что определение Минковского согласуется также с определениями площадей поверхностей этих тел.

Найдём, пользуясь определением Минковского, площадь поверхности нового для вас тела, по форме напоминающего «бублик» или «спасательный круг» (рис. 20.4). В геометрии это тело называют *тором*. Говоря точнее, тором называют тело, полученное в результате вращения круга вокруг прямой, лежащей в плоскости этого круга и его не пересекающей (рис. 20.5). При таком вращении центр круга описывает окружность, называемую *осевой окружностью тора* (красная линия на рисунке 20.5).

Используя формулу для вычисления объёма тела вращения, изученную в курсе алгебры 11 класса, несложно доказать (сделайте это самостоятельно), что объём тора можно вычислить по формуле

$$V_{\text{тора}} = 2\pi^2 r^2 R,$$

где r — радиус круга, R — радиус осевой окружности тора (см. рис. 20.5).

Перейдём к вычислению площади поверхности тора. Рассмотрим тор, образованный вращением круга радиуса r, с осевой окружностью радиуса R. Объём V_h его окутывающего слоя толщины h равен разности объёмов торов, образованных вращением кругов радиусов $r + h$ и $r - h$, с общей осевой окружностью радиуса R (рис. 20.6).

Рис. 20.4

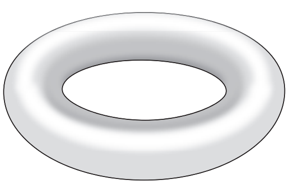


Рис. 20.5

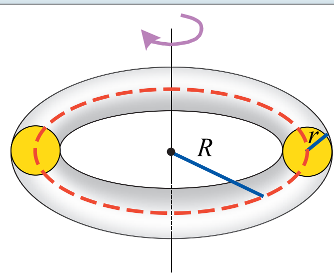
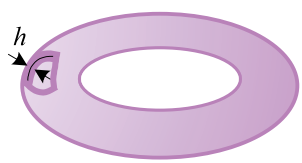


Рис. 20.6



Имеем:

$$V_h = 2\pi^2 (r+h)^2 R - 2\pi^2 (r-h)^2 R = 2\pi^2 R\big((r+h)^2 - (r-h)^2\big) = 8\pi^2 Rrh.$$

Поэтому площадь поверхности тора равна

$$S_{\text{тора}} = \lim_{h\to 0} \frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{8\pi^2 Rrh}{2h} = 4\pi^2 rR.$$

Задание № 3 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Высота конуса равна 9 см, а его объём – 6π см^3. Чему равна площадь основания конуса?
А) 2 см^2 Б) 2π см^2 В) 3π см^2 Г) 6 см^2

2. Вычислите объём правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 20 см, а высота – 9 см.
А) $300\sqrt{3}$ см^3 Б) 300 см^3 В) 900 см^3 Г) $900\sqrt{3}$ см^3

3. Чему равен радиус сферы, площадь которой составляет 100π см^2?
А) 100 см Б) 50 см В) 5 см Г) 20 см

4. Вычислите объём цилиндра, осевым сечением которого является квадрат со стороной 8 см.
А) 64π см^3 Б) 96π см^3 В) 128π см^3 Г) 512π см^3

5. Вычислите объём пирамиды, основанием которой является ромб с диагоналями 10 см и 18 см, а высота пирамиды равна 20 см.
А) 1800 см^3 Б) 600 см^3 В) 1200 см^3 Г) 300 см^3

6. Ребро куба уменьшили в 3 раза. Во сколько раз уменьшился объём куба?
А) в 3 раза Б) в 6 раз В) в 9 раз Г) в 27 раз

7. Найдите отношение площадей двух сфер, радиусы которых равны 5 см и 10 см.
А) 1 : 5 Б) 1 : 2 В) 1 : 8 Г) 1 : 4

8. Радиусы оснований цилиндра и конуса равны, высота цилиндра равна 8 см, а конуса – 6 см. Найдите отношение объёма цилиндра к объёму конуса.
А) 4 : 3 Б) 1 : 1 В) 4 : 1 Г) 3 : 1

9. Вычислите объём призмы, основанием которой является параллелограмм со сторонами 6 см и 4 см и углом 45°, а высота призмы равна $7\sqrt{2}$ см.
А) 168 см^3 Б) 84 см^3 В) 56 см^3 Г) 70 см^3

10. Вычислите объём шара с радиусом 3 см.
А) 36π см^3 Б) 9π см^3 В) 108π см^3 Г) 54π см^3

11. Площадь полной поверхности конуса равна 200π см^2, а его образующая – 17 см. Найдите объём конуса.
А) 960π см^3 Б) 320π см^3 В) 480π см^3 Г) 120π см^3

12. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а её диагональное сечение – равносторонний треугольник. Найдите объём пирамиды.
А) $\frac{a^3}{3}$ Б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ В) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ Г) $\frac{a^3}{6}$

13. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Диагональ боковой грани, содержащей катет, противолежащий углу α, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объём призмы.

А) $\frac{1}{4}c^3\sin 2\alpha \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$ В) $\frac{1}{4}c^3\sin 2\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\beta$

Б) $\frac{1}{2}c^3\sin 2\alpha \sin\alpha \sin\beta$ Г) $\frac{1}{2}c^3\sin 2\alpha \cos\alpha \sin\beta$

14. В основании конуса проведена хорда длиной 12 см, которую видно из центра основания под углом 120°. Найдите объём конуса, если его образующая равна 8 см.

А) $64\pi\sqrt{3}$ см^3 В) 192π см^3

Б) $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3 Г) 64π см^3

15. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с острым углом α. Боковое ребро, проходящее через вершину другого острого угла основания, перпендикулярно плоскости основания и равно h, а боковая грань, содержащая катет, прилежащий к данному углу α, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объём пирамиды.

А) $\frac{1}{6}h^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$ В) $\frac{1}{6}h^3 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$

Б) $\frac{1}{6}h^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ Г) $\frac{1}{6}h^3 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\beta$

16. Диагональ куба равна a. Чему равен объём куба?

А) $\frac{a^3}{8}$ Б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$ В) $\frac{a^3}{9}$ Г) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

17. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом β при основании. Все двугранные углы при рёбрах основания равны α. Найдите объём пирамиды.

А) $\frac{1}{6}b^3\sin 2\beta \sin\beta \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$ В) $\frac{1}{6}b^3\sin 2\beta \cos\beta \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$

Б) $\frac{1}{3}b^3\sin 2\beta \sin\beta \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$ Г) $\frac{1}{3}b^3\sin 2\beta \cos\beta \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$

18. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны 3 см и 9 см, а боковое ребро образует с плоскостью большего основания угол 45°. Найдите объём усечённой пирамиды.

А) 117 см^3 Б) $117\sqrt{2}$ см^3 В) 63 см^3 Г) $63\sqrt{2}$ см^3

Итоги главы 3

Объём тела

Объёмом тела называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:
1) равные тела имеют равные объёмы;
2) если тело составлено из нескольких других тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел;
3) за единицу измерения объёма тела принимают единичный куб, т. е. куб со стороной, равной единице измерения длины.

Объём призмы

$V = Sh$, где h — длина высоты призмы, S — площадь основания.

Объём пирамиды

$V = \frac{1}{3}Sh$, где h — длина высоты пирамиды, S — площадь основания.

Объём усечённой пирамиды

$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)h$, где h — длина высоты усечённой пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований.

Объём конуса

$V = \frac{1}{3}\pi r^2h$, где h — длина высоты конуса, r — радиус основания;

$V = \frac{1}{3}Sh$, где h — длина высоты пирамиды, S — площадь основания.

Объём усечённого конуса

$V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)$, где h — длина высоты конуса, r_1 и r_2 — радиусы оснований;

$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)h$, где h — длина высоты конуса, S_1 и S_2 — площади оснований.

Объём цилиндра

$V = \pi r^2 h$, где h — длина высоты цилиндра, r — радиус основания;

$V = Sh$, где h — длина высоты цилиндра, S — площадь основания.

Объём шара

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, где r — радиус сферы (шара).

Площадь поверхности шара

Площадью поверхности шара называют предел отношения $\frac{V_h}{h}$ при h, стремящемся к нулю, где V_h — объём атмосферы шара толщины h.

$S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2$, где r — радиус сферы.

§ 21. Упражнения для повторения курса 11 класса

Координаты и векторы в пространстве

21.1. Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, A $(-3;\ 4;\ 5)$, B $(-6;\ 2;\ 3)$, C $(7;\ -2;\ 1)$. Найдите координаты вершины D.

21.2. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, если A $(3;\ -1;\ -2)$, B $(-5;\ 7;\ 4)$, C $(1;\ 5;\ 2)$, D $(9;\ -3;\ -4)$.

21.3. Расстояние между точками A $(4;\ y;\ -2)$ и B $(3;\ 2;\ -5)$ равно $\sqrt{26}$. Найдите значение y.

21.4. Найдите модуль вектора $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$, если $\vec{m}$ $(5;\ -5;\ 2)$, $\vec{n}$ $(-2;\ 3;\ -1)$.

21.5. При каком значении y модуль вектора $\vec{a}$ $(-6;\ y;\ 3)$ равен 9?

21.6. При каком значении n векторы $\vec{a}$ $(5;\ -4;\ n)$ и $\vec{b}$ $(4;\ -2;\ -7)$ будут перпендикулярны?

21.7. Найдите на оси z точку, которая равноудалена от точек A $(6;\ -3;\ 2)$ и B $(2;\ 4;\ -1)$.

21.8. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A $(-3;\ 2;\ 1)$, B $(1;\ 1;\ 2)$, C $(7;\ 20;\ -3)$ и D $(3;\ 21;\ -4)$ является прямоугольником.

21.9. Найдите косинус угла A треугольника ABC, если A $(-1;\ 2;\ 1)$, B $(3;\ 7;\ 4)$, C $(2;\ -1;\ 1)$.

21.10. Даны точки A $(2;\ 2;\ 1)$, B $(3;\ 5;\ 4)$, C $(-1;\ -10;\ -14)$ и D $(-4;\ 6;\ -1)$. Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости ABC.

21.11. Точка M – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

21.12. Найдите модуль вектора $\vec{a}$ $(-4;\ 1;\ 3)$. При каких значениях β вектор $\vec{h}\left(-\frac{\beta}{4};\ \frac{1}{\beta};\ 1-\frac{1}{\beta}\right)$ будет коллинеарным вектору $\vec{a}$?

21.13. Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если A $(1;\ 6;\ 4)$, B $(3;\ 2;\ 5)$, C $(0;\ -1;\ 1)$, D $(2;\ -5;\ 2)$? Принадлежит ли точка C прямой AB?

21.14. В пространстве заданы точки M $(1;\ 5;\ -2)$, N $(2;\ 3;\ -1)$ и K $(3;\ 4;\ -1)$. Равны ли отрезки MN и MK? Найдите площадь треугольника MNK.

21.15. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AF}$, если A $(5;\ -3;\ -7)$, F $(1;\ -5;\ 3)$. Найдите координаты такой точки M на отрезке AF, что $\frac{AM}{MF} = \frac{2}{1}$.

21.16. Найдите сумму векторов $\vec{a}$ $(-3;\ 4;\ 6)$ и $\vec{b}$ $(9;\ -10;\ 1)$. Установите, при каком значении k векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - k\vec{b}$ перпендикулярны.

21.17. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°. Найдите $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.

21.18. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

21.19. Найдите длину отрезка AB, если $A\ (4; -2; 5)$, $B\ (2; -1; 3)$. Найдите уравнение плоскости, которая касается сферы с диаметром AB в точке B.

21.20. Найдите координаты вектора $\vec{m} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$, где $\vec{a}\ (-4; 2; 1)$, $\vec{b}\ (1; -1; -2)$. Найдите уравнение плоскости, которая проходит через координатную ось z и параллельна вектору $\vec{m}$.

21.21. Найдите координаты середины отрезка AB, если $A\ (-2; 3; 4)$, $B\ (-1; 0; -1)$. Запишите уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку AB и делящей его в отношении $2 : 1$, считая от точки B.

Тела вращения

21.22. Радиус основания цилиндра равен 8 см, а диагональ осевого сечения больше образующей на 2 см. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

21.23. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q. Найдите площадь сечения цилиндра, проходящего параллельно оси цилиндра на расстоянии, равном половине радиуса основания цилиндра.

21.24. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Через одну из образующих этого сечения проведено сечение, плоскость которого образует с плоскостью осевого сечения угол 60°. Найдите площадь этого сечения.

21.25. Прямоугольник со сторонами 5 см и 9 см вращается вокруг большей из сторон. Найдите: 1) площадь осевого сечения образовавшегося цилиндра; 2) длину окружности основания образовавшегося цилиндра; 3) площадь сечения, проходящего параллельно оси образовавшегося цилиндра на расстоянии 2 см от неё.

21.26. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, площадь которого равна Q, а диагональ сечения образует с плоскостью основания угол φ. Отрезок, соединяющий центр окружности верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с осью цилиндра угол α. Найдите высоту и радиус основания цилиндра.

21.27. Радиус основания конуса равен 9 см, а его высота разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости его основания. Найдите площади полученных сечений.

21.28. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен 30°, а радиус окружности, описанной около осевого сечения конуса, равен 6 см. Найдите высоту конуса.

21.29. Радиус основания конуса равен 24 см, а его высота разделена в отношении 3 : 4 : 5, считая от вершины. Через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания конуса. Найдите площади полученных сечений.

21.30. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 30°, а радиус окружности, описанной около осевого сечения, равен 12 см. Найдите образующую конуса.

21.31. Радиусы оснований усечённого конуса равны 10 см и 8 см, а его образующая перпендикулярна диагонали осевого сечения, проходящего через эту образующую. Найдите площадь осевого сечения усечённого конуса.

21.32. Радиусы оснований усечённого конуса равны 6 см и 9 см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью большего основания угол 30°. Найдите образующую усечённого конуса.

21.33. Образующая усечённого конуса равна 8 см, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен 60°. Диагональ осевого сечения перпендикулярна образующей, через которую проходит данное сечение. Найдите радиусы оснований усечённого конуса.

21.34. Образующая усечённого конуса равна 4 см и образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найдите радиусы оснований усечённого конуса, если диагональ его осевого сечения равна $2\sqrt{19}$ см.

21.35. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{MN}$, если M (2; –3; 1), N (1; –1; 3). Запишите уравнение сферы с центром в точке M и радиусом $R = MN$.

21.36. Найдите расстояние от точки M (4; –2; –4) до начала координат. Запишите уравнение сферы с центром в точке M, которая проходит через начало координат.

21.37. Найдите координаты начала вектора $\overrightarrow{EF}$, если $\overrightarrow{EF}$ (0; –3; 6), F (3; 3; 3). Найдите уравнение сферы радиуса $\sqrt{5}$, центр которой находится в точке, делящей отрезок EF в отношении 2 : 1, считая от точки E.

21.38. В правильную треугольную призму вписана сфера и около неё описана сфера. Найдите отношение радиусов этих сфер.

21.39. В правильную четырёхугольную призму вписан шар и около неё описан шар. Найдите отношение радиусов этих шаров.

21.40. На сфере выбрана точка M и из неё проведены три луча, которые пересекают сферу в точках A, B и C. Найдите радиус сферы, если $MA = MB = MC$, $\angle AMB = \angle AMC = \angle BMC = 60^\circ$, а расстояние от точки M до плоскости ABC равно 18 см.

21.41. Из точки F, лежащей на сфере, проведены три луча, которые пересекают сферу в точках A, B и C. Найдите расстояние от точки F до плоскости ABC, если радиус сферы равен 18 см, $FA = FB = FC$, $\angle AFB = \angle BFC = \angle AFC = 90^\circ$.

21.42. Радиусы окружностей, описанных около основания и боковой грани правильной четырёхугольной пирамиды, равны соответственно 8 см и $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ см. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

21.43. Радиусы окружностей, описанных около основания и боковой грани правильной треугольной пирамиды, соответственно равны 24 см и $12\sqrt{3}$ см. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

Объёмы тел. Площадь сферы

21.44. Меньшая сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна 6 см, а угол между диагоналями основания равен 60°. Найдите объём параллелепипеда, если его диагональ образует с плоскостью основания угол 30°.

21.45. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, меньшая диагональ которого равна 6 см, а острый угол — 60°. Боковое ребро параллелепипеда в 2 раза меньше стороны основания. Найдите объём параллелепипеда.

21.46. Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм, стороны которого равны 5 см и 8 см, а острый угол — 30°. Найдите объём параллелепипеда, если площадь его боковой поверхности равна 104 см^2.

21.47. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 13 см, 15 см и $\sqrt{106}$ см. Найдите объём параллелепипеда.

21.48. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с плоскостью основания угол 30°, а с одной из боковых граней — угол 45°. Найдите объём параллелепипеда, если радиус основания цилиндра равен 3 см.

21.49. В правильной шестиугольной призме диагональ боковой грани равна d и образует с плоскостью основания угол α. Найдите объём призмы.

21.50. Площадь основания правильной четырёхугольной призмы равна 16 см^2, а диагональ основания призмы в три раза меньше диагонали боковой грани. Найдите объём призмы.

21.51. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с углом α при основании. Диагональ боковой грани призмы, содержащей боковую сторону основания, равна d и наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объём призмы.

21.52. Меньшее диагональное сечение правильной шестиугольной призмы — квадрат, а бо́льшая диагональ призмы равна $2d$. Найдите объём призмы.

21.53. Основание прямой призмы — ромб с большей диагональю d и острым углом α. Через меньшую диагональ нижнего основания и вершину острого угла верхнего основания проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол γ. Найдите объём призмы.

21.54. Одна из сторон основания прямоугольного параллелепипеда равна 6 см, а диагональ основания — 12 см. Сечение, проходящее через диагональ нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол 30°. Найдите объём параллелепипеда.

21.55. Основанием наклонного параллелепипеда является квадрат со стороной 4 см. Две его противоположные боковые грани — также квадраты, а две другие — ромбы с острым углом 60°. Найдите объём параллелепипеда.

21.56. Основанием наклонного параллелепипеда является ромб со стороной a и острым углом α. Боковое ребро, выходящее из вершины острого угла ромба, равно b и образует с каждой из сторон ромба, которые оно пересекает, острый угол β. Найдите объём параллелепипеда.

21.57. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с основанием 16 см и боковой стороной 10 см. Проекцией вершины пирамиды на плоскость её основания является точка пересечения медиан основания. Наименьшее боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объём пирамиды.

21.58. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 10 см. Проекцией вершины пирамиды на плоскость её основания является точка пересечения биссектрис основания. Наименьшее боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите объём пирамиды.

21.59. Основанием правильной пирамиды является треугольник. Радиус окружности, описанной около основания, равен 6 см, а боковые рёбра образуют с плоскостью основания угол 30°. Найдите объём пирамиды.

21.60. В правильной четырёхугольной пирамиде апофема равна a, а угол между апофемами двух соседних боковых граней равен α. Найдите объём пирамиды.

21.61. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна h, а плоский угол при вершине — α. Найдите объём пирамиды.

21.62. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при вершине. Все двугранные углы при рёбрах основания равны β. Найдите объём пирамиды.

21.63. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Боковое ребро, проходящее через вершину наименьшего угла основания, перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см. Найдите объём пирамиды.

21.64. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Найдите объём пирамиды, если боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и в два раза меньше гипотенузы AB треугольника ABC.

21.65. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle ABC = \beta$. Грань ASC перпендикулярна плоскости основания, а грани BSC и ASB образуют с плоскостью основания угол α. Найдите объём пирамиды.

21.66. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Грань пирамиды, содержащая гипотенузу, перпендикулярна плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания угол β. Найдите объём пирамиды.

21.67. Основания усечённой пирамиды — треугольники со сторонами 7 см, 12 см, 13 см и 14 см, 24 см, 26 см соответственно. Боковая грань, содержащая средние по величине стороны оснований, перпендикулярна плоскостям оснований, а боковое ребро, не принадлежащее этой грани, образует с плоскостью большего основания угол 30°. Найдите объём усечённой пирамиды.

21.68. Стороны оснований правильной усечённой треугольной пирамиды равны 6 см и 12 см, а острый угол боковой грани равен 45°. Найдите объём усечённой пирамиды.

21.69. Объём цилиндра равен V, а площадь его осевого сечения — S. Найдите радиус основания цилиндра и его высоту.

21.70. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, пересекающее нижнее основание цилиндра по хорде, которая стягивает дугу α. Диагональ сечения равна d и образует с плоскостью основания угол β. Найдите объём цилиндра.

21.71. Образующая конуса равна 4 см и равна радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса. Найдите объём конуса.

21.72. Отрезки SA, SB и SC — образующие конуса. Известно, что $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = \alpha$, $AB = a$. Найдите объём конуса.

21.73. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна a, а высота — h. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

21.74. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом α. Боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Найдите объём конуса, описанного около этой пирамиды.

21.75. Около куба, ребро которого равно $2\sqrt{3}$ см, описан шар. Найдите объём шара и площадь его поверхности.

21.76. В правильную треугольную призму вписана сфера радиуса r. Найдите объём призмы.

21.77. В правильную четырёхугольную призму вписана сфера радиуса r. Найдите объём призмы.

21.78. В правильную треугольную призму вписан шар, объём которого равен V. Найдите объём призмы.

21.79. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b, а высота – h. Найдите объём шара, описанного около пирамиды.

21.80. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно b, а сторона основания – a. Найдите площадь сферы, описанной около пирамиды.

21.81. Объём конуса равен V, а угол при вершине осевого сечения – α. Найдите объём шара, вписанного в конус.

Дружим с компьютером

В 10 классе вы уже научились создавать изображения стереометрических объектов с помощью графического редактора либо специализированных пакетов для изображения объёмных объектов. Рекомендуем в 11 классе совершенствовать свои умения, создавая иллюстрации к изучаемому материалу. Если вы планируете выбрать профессию, требующую умения чертить и читать чертежи, — инженера, наладчика, квалифицированного рабочего, то вам будет полезно приобрести навыки работы со специализированными пакетами инженерной графики (например, *AutoCad*).

Задания курса стереометрии 11 класса для выполнения с помощью компьютера

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Для выполнения задания достаточно описать алгоритм решения задачи. Для тех, кто любит программирование, предлагаем создавать программы, реализующие эти алгоритмы.

К § 1 «Декартовы координаты точки в пространстве»

1. Напишите программу, которая изображает на экране компьютера оси декартовой системы координат с выбранным единичным отрезком. Напишите программу, которая по заданным координатам точки изображает её в этой системе координат. Для изображения отрезков найдите в изучаемом языке программирования средства изображения отрезка на экране компьютера.

2. Запишите алгоритм для нахождения расстояния между двумя точками в пространстве, заданными своими координатами. Какие структуры данных изучаемого языка программирования вы выберете для задания точки в пространстве? Напишите по этому алгоритму подпрограмму.

3. Напишите программу для нахождения координат середины отрезка.

К § 2 «Векторы в пространстве»

1. Создайте набор подпрограмм для работы с векторами:
1) по координатам начала и конца вектора найти координаты вектора;
2) по координатам вектора найти модуль вектора;

3) по координатам двух векторов определить, коллинеарны ли эти векторы;
4) по координатам двух векторов определить, равны ли эти векторы.
Определите, какие ещё подпрограммы будут полезны для работы с векторами, и добавьте их в этот набор.

2. Напишите программу для решения какой-либо задачи данного параграфа с использованием подпрограмм из этого набора.

К § 3 «Сложение и вычитание векторов»

1. Добавьте к набору подпрограмм для работы с векторами подпрограммы:
1) сложения двух векторов;
2) вычитания двух векторов.

2. Определите, какие полезные подпрограммы для работы с векторами можно создать по материалу этого параграфа. Напишите их.

3. Напишите программу для сложения n векторов, используя ранее созданные подпрограммы. Обратите особое внимание на способ задания этих векторов.

К § 4 «Умножение вектора на число. Гомотетия»

1. Добавьте к набору подпрограмм для работы с векторами подпрограмму умножения вектора на число.

2. Напишите программу для нахождения образа данной точки при гомотетии с данным центром и данным коэффициентом. Используйте ранее созданные подпрограммы для работы с векторами.

К § 5 «Скалярное произведение векторов»

1. Добавьте к набору подпрограмм для работы с векторами подпрограммы:
1) нахождения скалярного произведения двух векторов;
2) нахождения угла между двумя векторами.

К § 6 «Геометрическое место точек пространства. Уравнение плоскости»

1. Предположим, что есть подпрограмма, которая по координатам точки в пространстве определяет, принадлежит ли эта точка некоторому ГМТ. Как, пользуясь этой подпрограммой, построить изображение этого ГМТ на экране компьютера в декартовой системе координат?

Напишите программу для построения такого изображения. Каковы недостатки этого изображения? Какое преобразование, изученное в 10 классе, фактически реализует эта программа?

2. Напишите подпрограмму, которая по координатам точки в пространстве определяет, принадлежит ли она плоскости, заданной во входных параметрах подпрограммы a, b, c, d.

3. С помощью программ, созданных в заданиях 1 и 2, изобразите несколько разных плоскостей на экране компьютера. Сделайте вывод о целесообразности изображения плоскости целиком. Подберите параметры a, b, c, d так, чтобы получить изображение плоскости в виде прямой.

4. Как можно модифицировать программу изображения плоскости, чтобы это изображение было осмысленным?

К § 7 «Цилиндр»

1. Напишите программу, которая по данным радиусу основания и высоте цилиндра:

1) вычисляет площадь его боковой поверхности и площадь его полной поверхности;

2) строит на экране компьютера изображение развёртки цилиндра и подписывает соответствующие размеры.

2. Представьте окружность как результат вращения точки вокруг центра окружности. Пользуясь этим представлением, напишите подпрограмму для изображения окружности в декартовой системе координат, если эта окружность расположена в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей.

3. Пользуясь подпрограммой, созданной в задании 2, напишите программу для построения «каркасного» изображения цилиндра в декартовой системе координат на экране компьютера. Предусмотрите как можно больше вариантов расположения цилиндра.

К § 8 «Комбинации цилиндра с призмой»

1. Каким образом можно задать цилиндр и призму в структурах изучаемого языка программирования, чтобы можно было создать программу для определения, является ли одно из этих тел вписанным в другое? Какие подпрограммы для этого нужны?

2. Реализация программ, описанных в предыдущем задании, сложна в первую очередь потому, что вам неизвестно уравнение окружности в пространстве. Как можно обойти эту проблему?

Указание. Представьте окружность как ГМТ, принадлежащих данной плоскости и находящихся на данном расстоянии от данной точки — центра окружности.

К § 9 «Конус»

1. Напишите программу, которая по данным радиусу основания и высоте конуса:
1) вычисляет площадь его боковой поверхности и площадь его полной поверхности;
2) строит на экране компьютера изображение развёртки конуса и подписывает соответствующие размеры.

2. Пользуясь подпрограммой, созданной в задании 2 к § 7, напишите программу для построения «каркасного» изображения конуса в декартовой системе координат на экране компьютера. Предусмотрите как можно больше вариантов расположения конуса.

К § 10 «Усечённый конус»

1. Напишите программу, которая для данного усечённого конуса строит его развёртку и вычисляет площадь его полной поверхности. Какие нужны входные параметры для описания усечённого конуса?

К § 11 «Комбинации конуса и усечённого конуса с пирамидой»

1. Проанализируйте, из каких графических элементов состоит изображение конуса (усечённого конуса), вписанной в него и описанной около него пирамиды (усечённой пирамиды). Сделайте выводы о том, какая информация нужна для построения этих изображений на экране компьютера.

К § 12 «Сфера и шар. Уравнение сферы»

1. Напишите программу, которая по заданному уравнению сферы и заданной точке определяет, как расположена точка по отношению к сфере: вне сферы, принадлежит сфере или внутри сферы.

К § 13 «Взаимное расположение сферы и плоскости»

1. Напишите программу, которая по заданным уравнениям сферы и плоскости строит на экране компьютера изображение сферы и ГМТ пересечения сферы и плоскости.

К § 14 «Многогранники, вписанные в сферу», § 15 «Многогранники, описанные около сферы» и § 16 «Комбинации цилиндра и конуса со сферой»

1. Проанализируйте задания, которые вы выполняли в предыдущих параграфах, и определите, какие аналогичные задачи вы можете решить для сферы и многогранников, конуса и цилиндра, вписанных в неё и описанных около неё.

К § 17 «Объём тела. Формула для вычисления объёма призмы»

1. Напишите программу для вычисления объёма правильной n-угольной призмы со стороной основания a и высотой h.
2. Воспользовавшись классификацией призм, напишите программу для вычисления объёма как можно большего количества разных видов призм. Учтите, что в зависимости от вида призмы могут понадобиться разные параметры для её описания. Выбор призмы осуществляйте через меню для пользователя программы.

К § 18 «Формулы для вычисления объёмов пирамиды и усечённой пирамиды»

1. Проанализируйте задачи, приведённые в этом параграфе. Напишите программу для вычисления объёма пирамиды/усечённой пирамиды с использованием различных исходных данных, описывающих саму пирамиду и её элементы. Выбор имеющихся данных осуществляйте через меню для пользователя программы.

К § 19 «Объёмы тел вращения»

1. Проанализируйте задачи, приведённые в этом параграфе. Напишите программу для вычисления объёмов тел вращения с выбором вида те-

ла (конус, цилиндр, усечённый конус, шар) и имеющихся о нём сведений через меню для пользователя программы.

К § 20 «Площадь сферы»

1. Напишите программу, которая по заданному радиусу шара и толщине атмосферы вычисляет объём шара и объём его атмосферы.
2. Постройте с помощью редактора диаграмм *Word* или *Excel* столбчатую диаграмму. Выберите вид диаграммы «объёмная» и представление ряда данных в виде различных геометрических фигур (призм, конусов и т. п.). Используя полученные знания об объёмах тел, определите, какие из этих фигур дают наиболее адекватное представление о соотношении числовых величин.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Проект – это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации. Примерный объём реферата – 10–15 страниц, доклада или компьютерной презентации – 10–20 минут.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Конические сечения

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Бронштейн И. Общие свойства конических сечений // Квант. – 1975. – № 5.

Дорфман А.Г. Оптика конических сечений. Серия «Популярные лекции по математике». – Вып. 31. – М. : Физматгиз, 1959.

Акопян А.В., Заславский А.В. Геометрические свойства кривых второго порядка. – М. : МЦНМО, 2007.

Маркушевич А.И. Замечательные кривые. – М. : ГИТТЛ, 1952.

http://ru.wikipedia.org/wiki/ – Конические сечения.

http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/cab54249-c26e-1842-e2f1-fd270b2bbb3a/00145619952571813.htm – Первоначальные сведения о конических сечениях.

2. Объём шара и принцип Кавальери

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Мамикон М. Объём шара // Квант. – 1977. – № 5.

Мамикон М. Центр тяжести полушария // Квант. – 1978. – № 11.

Шевелев Л. Объём тел вращения // Квант. – 1973. – № 8.

Рабинович В. Вычисление объёма с помощью принципа Кавальери // Квант. – 1972. – № 6.

Болтянский В. О понятиях площади и объёма // Квант. – 1977. – № 5.

Терешин Д. Обращение принципа Кавальери // Квант. – 1994. – № 2.

Лурье С. Математический эпос Кавальери // Квант. – 1994. – № 2.

https://ru.wikipedia.org/wiki/ – Шар.

3. Площадь поверхности

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Дубровский В. Площадь поверхности по Минковскому // Квант. – 1979. – № 4.

Панов А. Малярный парадокс // Квант. – 1986. – № 8.

http://ru.wikipedia.org/wiki/ – Сапог Шварца.

http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=1018 – Задачи (площадь поверхности).

Прасолов В.В., *Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. – М. : Наука, 1989.

Меерзон Г.А., *Ященко И.В.* Длина, площадь, объём. – М. : МЦНМО, 2011.

4. Стереометрия и проективная геометрия

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Заславский А. Некоторые факты проективной геометрии // Квант. – 1996. – № 1.

Савин А. Проективная плоскость // Квант. – 1974. – № 3.

Тадеев В. Простые, двойные, гармонические // Квант. – 1982. – № 7.

Шарыгин И. Выход в пространство // Квант. – 1975. – № 5.

Театр теней // Квант. – 1989. – № 11.

Перспектива // Квант. – 1984. – № 2.

http://ru.wikipedia.org/wiki/ – Проективная геометрия.

Прасолов В.В., *Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. – М. : Наука, 1989.

5. Теоремы Чевы и Менелая в пространстве

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

Габович И. Теорема Менелая для тетраэдра // Квант. – 1996. – № 6.

Эрдниев Б., *Манцаев Н.* Теоремы Чевы и Менелая // Квант. – 1990. – № 3.

Прасолов В.В., *Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. – М. : Наука, 1989.

http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=729 – Задачи (теоремы Чевы и Менелая в пространстве).

Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Т. 3 : треугольники и тетраэдры. – М. : МЦНМО, 2009.

Ответы и указания к упражнениям

1.19. (0; 4; 4). *Указание.* Искомая точка — середина отрезка PK, где P — середина отрезка MK. **1.21.** D (4; –3; 0). **1.24.** $y = -3$ или $y = -7$. **1.26.** (0; –3,5; 0). **1.28.** A (0; 0; –10), B (–24; 20; 0), $AB = 2\sqrt{269}$. **1.31.** *Указание.* Сравните длины отрезков AB, BC и AC. **1.36.** 10 см, $\frac{16}{3}$ см, $\frac{34}{3}$ см. **1.37.** 80 см. **1.38.** 12 см. **1.39.** $8a^2 \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **2.10.** $\sqrt{47}$ или $-\sqrt{47}$. **2.21.** $\vec{p}\,(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ или $\vec{p}\,(-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$. **2.23.** $2\sqrt{13}$ см. **2.24.** $90\sqrt{3}$ см². **2.25.** $3\sqrt{21}$ см. **2.26.** 2720 см². **3.9.** C (0,5; 1; –1). **3.12.** $z = 5$, $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = 6$. **3.14.** $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{B_1C} - \overrightarrow{B_1D}$. **3.15.** 16 см. **3.16.** $324 + 216\sqrt{6}$ см². **4.11.** $y = -2$, $z = -12$. **4.13.** $\vec{b}$ (9; –6; –18). **4.18.** *Указание.* Проверьте коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. **4.20.** $\overrightarrow{BM} = 0{,}5\overrightarrow{SA} + 0{,}5\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$. **4.26.** $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{5}{12}\overrightarrow{PB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{PC}$. *Указание.* $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. **4.28.** $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AM}$. **4.29.** $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$. *Указание.* Точка K — точка пересечения медиан треугольника AA_1C. **4.30.** $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CB}$. **4.31.** 2 см. **4.32.** $18\sqrt{2}$ см. **4.33.** $2\sqrt{2}$ см. **5.14.** 1) $x > 7$; 2) $x = 7$; 3) $x < 7$. **5.20.** *Указание.* Найдите углы между вектором $\overrightarrow{AB}$ и векторами $\vec{e_1}$ (1; 0; 0), $\vec{e_2}$ (0; 1; 0), $\vec{e_3}$ (0; 0; 1). **5.23.** $\vec{n}$ (–10; 6; –8). **5.24.** 1) $\sqrt{19}$. *Указание.* $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}}$. **5.26.** $-0{,}1\sqrt{2}$. **5.28.** $k = -\frac{7}{26}$. **5.30.** *Указание.* Докажите, что $AB \perp BC$ и $AB \perp BD$. **5.31.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. *Указание.* Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. **5.32.** 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **5.33.** $12\sqrt{3}$ см². **5.34.** $\frac{9}{49}$. **5.35.** $\sqrt{26}$ см. **5.36.** $16(\sqrt{3} + 2)$ см². **6.4.** 1) $4x - y + z - 4 = 0$; 2) $x + y - 3z - 8 = 0$. **6.5.** $-2x + y + 4z = 0$. **6.6.** $3x + 5y + 4z - 50 = 0$. **6.7.** $y - 3 = 0$. **6.8.** $x + 2 = 0$. **6.9.** $y = 0$. **6.11.** $5x - 3y - 2x + 13 = 0$. **6.12.** $x + y - 2 = 0$. **6.13.** $4x + 3y + z - 16 = 0$. *Указание.* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$. **6.15.** 36 см². **6.16.** 128 см. **6.17.** 45°. **6.18.** 48 см². **7.13.** $\frac{2}{3}Q\sqrt{3}$. **7.14.** 17 см². **7.16.** $\sqrt{d^2 + m^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. **7.18.** $\dfrac{2d^2\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\operatorname{ctg}^2\gamma\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1}$.

7.20. 1 : 11. **7.23.** 24 см, 6 см. **7.27.** $\left(\frac{24}{\pi}+16\sqrt{3}\right)$ см^2. **7.29.** $\frac{128\pi}{3}$ см^2. **7.31.** $\frac{\pi m^2 \sin 2\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **7.33.** 8 см. **7.35.** $2\operatorname{arcctg}\pi$. *Указание*. Стороны развёртки равны $2\pi R$ и H, откуда $H = 2\pi R$. **7.36.** $\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{\sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha}}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. **7.37.** *Указание*. Через точку A проведите прямую m, параллельную MM_1. Она пересекает нижнее основание цилиндра в точке A_1 ($AA_1 = MM_1$). K – точка пересечения прямых A_1B и MN. Искомая точка – точка пересечения прямых AB и KK_1 ($KK_1 \parallel MM_1$). **7.39.** $544\pi\sqrt{3}$ см^2. **7.41.** 15 см, 25 см. **7.42.** $16\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см. **7.43.** 45°. **7.44.** 243 см^2. **8.7.** Да. **8.8.** Нет. *Указание*. Сравните суммы противолежащих сторон трапеции. **8.11.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$ см. **8.16.** $\frac{3}{2}S\sqrt{3}$. **8.19.** $16R^2\operatorname{tg}\alpha$. **8.20.** 3 : 4. *Указание*. Отношение площадей боковых поверхностей призм равно отношению периметров оснований призм. Выразите сторону основания каждой из призм через радиус основания цилиндра. **8.22.** $32\pi\sqrt{3}$ см^2. **8.24.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^2 \operatorname{ctg}\alpha$. **8.26.** $16r^2 \sin\alpha \sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta \cos^2\frac{\alpha}{2}$. **8.27.** $rh\sqrt{3}$. **8.30.** 8 см. **8.31.** $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$. **9.15.** $\pi Q\operatorname{ctg}\alpha$. **9.16.** 30°. **9.18.** $\frac{m\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **9.20.** $\frac{h^2\sin^2\varphi}{2\cos^2\alpha}$. **9.22.** 320π см^3. **9.24.** 60°. **9.25.** $\pi S\left(1+\sqrt{2}\right)$. *Указание*. Если радиус основания конуса равен r, то его высота также равна r, откуда $r = \sqrt{S}$. **9.26.** $\left(\sqrt{3}+1\right) : 2$. **9.27.** $\pi S \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **9.28.** 36π см^2. *Указание*. Если l – образующая конуса, r – радиус его основания, то $\frac{2\pi l}{3} = 2\pi r$, откуда $l = 3r$. **9.31.** $\frac{\pi a^2 \sin\frac{\varphi+\alpha}{4}\cos\frac{\varphi-\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}$. **9.33.** $2\sqrt{2}$ см. **9.35.** $\frac{\pi h^2\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\sin^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **9.37.** $\frac{2\pi Q\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta}}{\sin\alpha}$. **9.38.** 14 см; 20 см. **9.39.** 4 см. **9.40.** $2d^2\left(\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}+\sin\beta\right)\sin\alpha$. **10.8.** 16 см^2. **10.10.** 252 см^2. **10.12.** 54π см^2. **10.14.** 72π см^2. **10.17.** *Указание*. Продлите две образующие до пересечения (точка S). Пусть луч SB пересекает окружность нижнего ос-

нования в точке B_1. Через точку B проведите прямую, параллельную прямой B_1A. Искомая точка – точка пересечения прямой BA и линии пересечения плоскостей BB_1A и MM_1N_1. **10.18.** $\pi m^2 \sin\alpha$. *Указание*. Если диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, то её высота равна средней линии. **10.20.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **10.21.** 9,6 см. **10.22.** $2d^2(\sin\alpha + \sin\beta)\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.
11.3. $4\pi\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)$ см^2. **11.6.** $\frac{Q\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin 2\alpha}$. **11.8.** $\frac{\pi m^2 \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos\varphi}$. **11.10.** 64π см^3.
11.12. $5\sqrt{3}$ см^2. **11.14.** $\frac{9\sqrt{5}}{2}$. **11.16.** 16 см^2. **12.10.** $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ или $(x + 12)^2 + y^2 + z^2 = 49$. **12.11.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ или $x^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 9$.
12.13. $(0; 8; -3)$, $r = \sqrt{73}$. **12.14.** $x^2 + (y + 4)^2 + (z - 8)^2 = 46$ или $x^2 + (y - 5{,}6)^2 + (z - 3{,}2)^2 = 46$. **12.15.** $(x - 9)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 90$ или $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 9)^2 = 90$.
12.16. 4 см. **12.17.** $2\sqrt{65}$ см. **12.18.** $8\left(2+\sqrt{2}\right)$ см^2. **13.7.** $\sqrt{\frac{Q}{2\pi}}$. **13.17.** 5 см.
13.21. 8 см. **13.23.** 16 : 25. **13.25.** 24 см. **13.26.** 10 800 см^2. **14.1.** $5\pi\sqrt{30}$ см^3.
14.3. 288 см^2. **14.5.** $4R^2\sin 2\alpha(\sin\beta + \cos\beta)$. **14.9.** 12 см. **14.11.** $\frac{\pi l^2}{\sin^2\alpha}$.
14.12. $\frac{\pi b^2}{\cos^2\beta}$. **14.13.** $56\sqrt{3}$ см^2. **14.14.** 300 см^2. **15.2.** $\sqrt{3}$. **15.4.** $7\sqrt{3}$ см.
15.6. $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ см. **15.8.** 12 см^2. **15.10.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. **15.11.** Найдите радиус шара, вписанного в правильную шестиугольную пирамиду, высота которой равна h, а двугранный угол при основании – β. **15.12.** $\frac{8r^2\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.
15.15. 3 см. **15.16.** $4\left(2-\sqrt{3}\right)$ см. **15.20.** 96 см^2. **15.21.** 150 см^2.
15.22. $\frac{4r^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos\varphi}$. **15.23.** Да. $\vec{c} = \left(-1; \frac{9}{2}; -\frac{7}{2}\right)$ или $\vec{c} = \left(1; -\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$. **16.8.** 10 см, $\frac{169}{8}$ см. **16.10.** $a\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\frac{a}{2\sin\alpha}$. **16.12.** 6 см.
16.13. 4 см. **17.12.** 121,5 см^3. **17.14.** $54\sqrt{2}$ см^3. **17.17.** $512\sqrt{2}$ см^3.
17.19. $a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **17.21.** $0{,}25V$. **17.23.** $\frac{1}{2}d^3\cos^2\beta\sin\beta\sin\alpha$.
17.25. $\frac{c^3\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\sin^2(\alpha+\beta)}$. **17.27.** $36\left(3+\sqrt{2}\right)$ см^2. **17.29.** $\frac{a^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\sin\alpha}$. **17.31.** 1800 см^3

или 960 см^3. *Указание*. Пусть a — длина стороны основания призмы, h — длина её высоты. Тогда $a^2 + h^2 = 289$, $4ah = 480$. **17.34.** 162 см^3. **17.38.** 96 см^3. **17.39.** $\sqrt{MNS\sin\alpha}$. *Указание*. Пусть стороны основания, принадлежащие граням с площадями M и N, равны a и b соответственно. Тогда $ab\sin\alpha = S$, $ah = M$, $bh = N$, $abh^2 = MN$, $h = \sqrt{\dfrac{MN}{ab}} = \sqrt{\dfrac{MN\sin\alpha}{S}}$. **17.41.** $0{,}25c\sqrt{32Q^2 - 2c^4}$. **17.43.** $160\sqrt{23}$ см^3. **17.45.** $d^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{3\left(1 - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **17.47.** $3\sqrt{15}$ см^3. *Указание*. Пусть $ABCD$ — грань призмы, которая является ромбом. $AB = 3$ см, $BD = 4$ см, тогда $AC = 2\sqrt{5}$ см. Высота ромба, равная h, является также и высотой призмы, $h = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD}{AB} = \dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ см. **17.49.** $256\sqrt{2}$ см^3. **17.51.** 16 см, 12 см. **17.52.** 8 см, 12 см. **17.54.** $p = 4$; $p = 0$; $3x - 2y = 0$. **18.9.** $\dfrac{1}{48}V$. **18.13.** $\dfrac{2S\sqrt{S}}{3\sqrt[4]{3}}$. **18.17.** $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ см^3. **18.23.** 96 см^3. **18.25.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ см^3. **18.27.** 1. **18.29.** $168\sqrt{3}$ см^3. **18.31.** $\dfrac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **18.33.** $\dfrac{1}{6}a^3\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi$. **18.35.** $\dfrac{1}{6}a^3\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **18.41.** $\dfrac{1}{12}a^3\sin^2 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **18.45.** $25\dfrac{1}{3}$ см^3. **18.47.** 87,5 см^3. *Указание*. Если r_1 и r_2 — радиусы окружностей, описанных около большего и меньшего оснований усечённой пирамиды соответственно, h — её высота, то $h = (r_1 - r_2)\,\mathrm{tg}\,45°$. **18.49.** $784\sqrt{3}$ см^3. *Указание*. Если r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в большее и меньшее основания усечённой пирамиды соответственно, h — её высота, то $h = (r_1 - r_2)\,\mathrm{tg}\,60°$. **19.12.** $\dfrac{\pi}{3}(R^3 - r^3)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **19.20.** $\dfrac{m^3}{4\pi}$. **19.21.** 216π см^3. **19.25.** $768\pi\sqrt{3}$ см^3. **19.31.** $\sqrt{3}$. **19.32.** $\dfrac{448\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3. **19.34.** $3\sqrt[3]{4}$ см. **19.36.** 8π см. **19.38.** 288π см^3. **19.40.** $\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$. *Указание*. На рисунке изображён данный конус, $S_{OAB} = S_{SAB}\cos\beta = S\cos\beta$, $\dfrac{1}{2}OB^2\sin\alpha = S\cos\beta$,

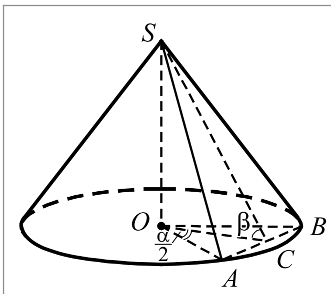


Рис. к задаче 19.40

$OB=\sqrt{\dfrac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}},\ OC=OB\cos\dfrac{\alpha}{2},\ SO=OC\operatorname{tg}\beta$. **19.41.** 474π см³. **19.43.** $\dfrac{4S\sqrt{\pi S}}{3\pi\cos^3\alpha}$.
19.44. 162 см². **19.45.** $\dfrac{65}{17}$ см. **20.8.** S_1+S_2. **20.10.** $36\sqrt{5}$ см². **20.11.** $\dfrac{65}{6}$ см.
21.12. $\beta=4$. **21.13.** Векторы равны. Точка C не принадлежит прямой AB.
21.14. $S=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **21.15.** $M\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{13}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$. **21.16.** (6; –6; 7); $k=0$. **21.19.** 3; $-2x+y-2z+11=0$. **21.20.** $\overrightarrow{m}$ (–3; –1; –8); $|\overrightarrow{b}|=2$. **21.21.** $M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$; $3x-9y-15z+58=0$. **21.23.** $\dfrac{Q\sqrt{3}}{2}$. **21.31.** 108 см². **21.32.** $2\sqrt{21}$ см.
21.35. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. **21.36.** 6; $(x-4)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=36$.
21.37. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=5$. **21.38.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

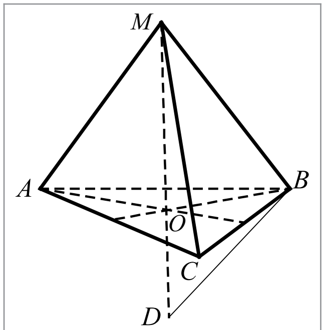


Рис. к задаче 21.40

21.40. 13,5 см. *Указание* (см. рис.). Продлим высоту MO образовавшейся правильной пирамиды $MABC$ до пересечения со сферой (точка D), $\angle MBD=90^\circ$, $OB^2=MO\cdot OD$. Пусть r — радиус сферы, $MB=a$. Тогда $MD=2r$, $OB=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{a^2}{3}+324=a^2$, $a=9\sqrt{6}$ см. **21.42.** 8 см. *Указание.* Пусть $SABCD$ — данная пирамида, SO — её высота. Тогда $AB=8\sqrt{2}$ см, $\sin\angle ACB=\dfrac{AB}{2\cdot\dfrac{8\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
$\angle ASB=60^\circ$, откуда $AS=8\sqrt{2}$ см, $SO=8$ см. **21.47.** 540 см³. **21.48.** $24\sqrt{6}$ см³.
21.49. $1{,}5\sqrt{3}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. **21.51.** $\dfrac{1}{2}d^3\sin\beta\cos^2\beta\sin2\alpha$. **21.52.** $\dfrac{36d^3\sqrt{7}}{49}$.
21.53. $\dfrac{d^3}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\gamma$. **21.55.** $32\sqrt{3}$ см³. **21.56.** $2a^2b\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\beta}$.
21.57. $64\sqrt{3}$ см³. **21.60.** $\dfrac{8}{3}a^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$. **21.61.** $\dfrac{4h^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{3\cos\alpha}$.
21.62. $\dfrac{1}{24}a^3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\beta$. **21.65.** $\dfrac{1}{6}a^3\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **21.67.** $224\sqrt{3}$ см³.
21.68. $63\sqrt{2}$ см³. **21.69.** $\dfrac{2V}{\pi S}$, $\dfrac{\pi S^2}{4V}$. **21.71.** 8π см³. **21.72.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{9-12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}{54\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

21.76. $6r^3\sqrt{3}$. **21.79.** $\dfrac{\pi b^6}{6h^3}$. *Указание*. Пусть $SABC$ – данная пирамида, R – радиус описанного шара. Продлите высоту SO пирамиды до пересечения с поверхностью шара (точка S_1). Тогда $\angle SAS_1 = 90°$, $SS_1 = 2R$, $SB^2 = SS_1 \cdot SO$.

21.81. $4V\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)$. *Указание*. Рассмотрим ΔABC – осевое сечение конуса (см. рис.), $AO = R$, $OO_1 = r$, $BO = R\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{1}{3}\pi R^3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = V$, $R = \sqrt[3]{\dfrac{3V\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\pi}}$. Из ΔAOO_1: $r = R\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)$.

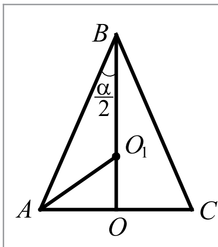


Рис. к задаче 21.81

Ответы к заданиям «Проверьте себя» в тестовой форме

Номер задания	Номер задачи								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	А	В	Б	В	В	Б	В	Б	В
2	Б	Г	А	В	А	Г	Б	А	Б
3	Б	Г	В	В	Б	Г	Г	В	А

Номер задания	Номер задачи								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	Б	Г	Б	Г	А	Б	Г	Б	В
2	В	Г	Б	В	А	В	Б	Г	Б
3	А	Б	В	А	Г	В	Г	А	Б

Алфавитно-предметный указатель

Содержание